Semaine 11

Espaces vectoriels

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 8 - Espaces vectoriels

Espaces et sous-espaces vectoriels

- Définition d'un espace vectoriel.
- Espaces vectoriels usuels.
- Définition et caractérisation des sous-espaces vectoriels.
- Définition et propriétés des sous-espaces engendrés.

Familles de vecteurs

- Définition d'une famille génératrice.
- Définitions d'une famille libre, d'une famille liée. Caractérisation des familles liées.
- Définition et caractérisation d'une base d'un espace vectoriel.
- Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X]$.

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dimension d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel.
- Cardinal d'une famille libre ou génératrice dans un espace vectoriel de dimension finie.
- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrices de passage : définition et propriétés.
- Formules de changement de bases.
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une famille libre, d'une famille génératrice.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E.
  Alors $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots e_n)$ est une base de E, alors tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \ldots e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n.$$

Prochain programme : *Espaces vectoriels - Couples de variables aléatoires discrètes*