Semaine 13

Couples de variables aléatoires discrètes

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 9 - Couples de variables aléatoires discrètes

Couples de variables aléatoires discrètes

- Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Système complet d'événements associé à un couple. Caractérisation d'une loi conjointe de probabilité.
- Lois marginales d'un couple.
- Lois conditionnelles d'un couple.
- Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Variables aléatoires $g(X, Y)$

- Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes. Loi de $g(X, Y)$.
- Loi d'une somme de deux variables. Stabilités des lois de Poisson et des lois binomiales.
- Maximum et minimum de deux variables aléatoires discrètes.

Espérance, covariance et corrélation linéaire

- Espérance de $g(X, Y)$. Théorème de transfert double. Linéarité de l'espérance. Espérance d'un produit dans le cas général et dans le cas où les variables sont indépendantes.
- Covariance. Formule de Koenig-Huygens. Propriétés de la covariance. Covariance dans le cas où les variables sont indépendantes. Variance d'une somme.
- Coefficient de corrélation linéaire. Propriétés du coefficient de corrélation linaire.

Suites de variables aléatoires discrètes

- Fonction de n variables aléatoires discrètes.
- Indépendance mutuelle. Lemme des coalitions.
- Espérance d'une somme de n variables aléatoires discrètes. Variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
- Stabilités des lois de Poisson et des lois binomiales.
- Maximum et minimum de n variables aléatoires discrètes.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.
- Si X, Y, Z admettent toutes une variance alors :
  1. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
  2. *Symétrie* : $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
     Bilinéarité (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables) :
     - *linéarité à gauche* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda Cov(X, Z) + \mu Cov(Y, Z)$;
     - *linéarité à droite* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Cov(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda Cov(X, Y) + \mu Cov(X, Z)$.

     Positivité : $Cov(X, X) = V(X) \geq 0$.
  3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$.

Prochain programme : *Couples de variables aléatoires discrètes - Intégration*