Semaine 15

Intégration

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 10 - Intégration

Intégration sur un segment

- Primitives d'une fonction continue. Existence d'une primitive (qui n'est pas unique). Primitives et opérations. Primitives usuelles.
- Intégrale d'une fonction continue. Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, intégration des inégalités, stricte positivité, inégalité triangulaire.
- Techniques de calcul d'intégrales : calcul direct, intégration par parties, changement de variable.

Intégrales généralisées

- Intégrale généralisé d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$, sur $]-\infty, a]$ et sur $]-\infty, +\infty[$.
- Propriétés des intégrales impropres : linéarité, relation de Chasles, positivité, intégration des inégalités.
- Intégration par parties et changement de variable dans le cas des intégrales impropres.

Critères de convergence des intégrales généralisées

- Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$.
- Théorèmes de comparaisons sur les intégrales de fonctions positives : à l'aide d'inégalités, à l'aide des petits-o, à l'aide des équivalents.
- Convergence absolue.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Propriétés de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, positivité et intégration des inégalités).
- Théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Prochain programme : *Intégration - Variables aléatoires à densité*

Bonnes vacances et joyeuses fêtes à tous !