

— Semaine 16 —

Intégration - Variables aléatoires à densité

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 10 - Intégration

Intégration sur un segment

- Primitives d'une fonction continue. Existence d'une primitive (qui n'est pas unique). Primitives et opérations. Primitives usuelles.
- Intégrale d'une fonction continue. Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, intégration des inégalités, stricte positivité, inégalité triangulaire.
- Techniques de calcul d'intégrales : calcul direct, intégration par parties, changement de variable.

Intégrales généralisées

- Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$, sur $] - \infty, a]$ et sur $] - \infty, +\infty[$.
- Propriétés des intégrales impropres : linéarité, relation de Chasles, positivité, intégration des inégalités.
- Intégration par parties et changement de variable dans le cas des intégrales impropres.

Critères de convergence des intégrales généralisées

- Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$.
- Théorèmes de comparaisons sur les intégrales de fonctions positives : à l'aide d'inégalités, à l'aide des petits- o , à l'aide des équivalents.
- Convergence absolue.

Chapitre 11 - Variables aléatoires à densité

Généralités sur les variables aléatoires

- Définition d'une variable aléatoire, opérations sur les variables aléatoires.
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire : définition, propriétés, caractérisation d'une fonction de répartition, continuité à gauche.
- Indépendance de deux variables aléatoires, d'une famille finie de variables aléatoires et d'une suite de variables aléatoires. Lemme des coalitions.
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
- Variables aléatoires centrées réduites.

Variables aléatoires à densité

- Définition d'une variable aléatoire à densité à partir de la fonction de répartition.
- Définition et propriétés d'une densité de probabilité.
- Lien entre fonction de répartition et densité et entre probabilités et densité.
- Transformée d'une variable aléatoire à densité.

Moments d'une variable aléatoire à densité

- Espérance d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Théorème de transfert.
- Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité : définition et propriétés.
- Variance et écart type d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Formule de Koenig-Huygens.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
- Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

La variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et une densité f_Y de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Prochain programme : Variables aléatoires à densité - Applications linéaires