

— Semaine 17 —

Variables aléatoires à densité Applications linéaires

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.
- La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.

Chapitre 11 - Variables aléatoires à densité

Généralités sur les variables aléatoires

- Définition d'une variable aléatoire, opérations sur les variables aléatoires.
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire : définition, propriétés, caractérisation d'une fonction de répartition, continuité à gauche.
- Indépendance de deux variables aléatoires, d'une famille finie de variables aléatoires et d'une suite de variables aléatoires. Lemme des coalitions.
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
- Variables aléatoires centrées réduites.

Variables aléatoires à densité

- Définition d'une variable aléatoire à densité à partir de la fonction de répartition.
- Définition et propriétés d'une densité de probabilité.
- Lien entre fonction de répartition et densité et entre probabilités et densité.
- Transformée d'une variable aléatoire à densité.

Moments d'une variable aléatoire à densité

- Espérance d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Théorème de transfert.
- Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité : définition et propriétés.
- Variance et écart type d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Formule de Koenig-Huygens.

Chapitre 12 - Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires

- Applications linéaires : définition, caractérisation et propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, composition d'applications linéaires, application réciproque, composition d'isomorphismes.
- Noyau d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de l'injectivité par le noyau.
- Image d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de la surjectivité par l'image.

Applications linéaires en dimension finie

- Image d'une base par une application linéaire. Famille génératrice de l'image.
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Caractérisation des isomorphismes $f \in \mathcal{L}(E, F)$ lorsque $\dim(E) = \dim(F)$. Isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X et $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
La variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et une densité f_Y de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
- $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors : f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

Prochain programme : Applications linéaires - Lois à densité usuelles