Semaine 18

Variables aléatoires à densité
Applications linéaires

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 11 - Variables aléatoires à densité

Généralités sur les variables aléatoires

- Définition d'une variable aléatoire, opérations sur les variables aléatoires.
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire : définition, propriétés, caractérisation d'une fonction de répartition, continuité à gauche.
- Indépendance de deux variables aléatoires, d'une famille finie de variables aléatoires et d'une suite de variables aléatoires. Lemme des coalitions.
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
- Variables aléatoires centrées réduites.

Variables aléatoires à densité

- Définition d'une variable aléatoire à densité à partir de la fonction de répartition.
- Définition et propriétés d'une densité de probabilité.
- Lien entre fonction de répartition et densité et entre probabilités et densité.
- Transformée d'une variable aléatoire à densité.

Moments d'une variable aléatoire à densité

- Espérance d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Théorème de transfert.
- Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité : définition et propriétés.
- Variance et écart type d'une variable aléatoire à densité : définitions et propriétés. Formule de Koenig-Huygens.

Chapitre 12 - Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires

- Applications linéaires : définition, caractérisation et propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires : $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel, composition d'applications linéaires, application réciproque, composition d'isomorphismes.
- Noyau d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de l'injectivité par le noyau.
- Image d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de la surjectivité par l'image.

Applications linéaires en dimension finie

- Image d'une base par une application linéaire. Famille génératrice de l'image.
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Caractérisation des isomorphismes $f \in \mathscr{L}(E, F)$ lorsque $dim(E) = dim(F)$. Isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

Applications linéaires et matrices

- Matrice d'une application linéaire, matrice d'un endomorphisme. Rang d'une application linéaire et de sa matrice.
- Opérations sur les matrices d'applications linéaires : combinaisons linéaires, composées, réciproque.
- Isomorphismes de représentation des vecteurs, des applications linéaires.
- Utilisation de la matrice d'une application linéaire f pour déterminer l'image d'un vecteur par f, pour déterminer le noyau de f et pour déterminer l'image de f.
- Formule de changement de bases.
- Matrices semblables : définition et propriétés (lien avec les endomorphismes, rang, inversibilité, diagonalisabilité, valeurs propres, sous-espaces propres).

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.
- $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.
- $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, alors $Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.
- Si $dim(E) = dim(F)$, alors : f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Prochain programme : *Applications linéaires - Lois à densité usuelles*