

— Semaine 19 —

Applications linéaires - Lois à densité usuelles

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 12 - Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires

- Applications linéaires : définition, caractérisation et propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires : $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, composition d'applications linéaires, application réciproque, composition d'isomorphismes.
- Noyau d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de l'injectivité par le noyau.
- Image d'une application linéaire : définition, structure algébrique, caractérisation de la surjectivité par l'image.

Applications linéaires en dimension finie

- Image d'une base par une application linéaire. Famille génératrice de l'image.
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Caractérisation des isomorphismes $f \in \mathcal{L}(E, F)$ lorsque $\dim(E) = \dim(F)$. Isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

Applications linéaires et matrices

- Matrice d'une application linéaire, matrice d'un endomorphisme. Rang d'une application linéaire et de sa matrice.
- Opérations sur les matrices d'applications linéaires : combinaisons linéaires, composées, réciproque.
- Isomorphismes de représentation des vecteurs, des applications linéaires.
- Utilisation de la matrice d'une application linéaire f pour déterminer l'image d'un vecteur par f , pour déterminer le noyau de f et pour déterminer l'image de f .
- Formule de changement de bases.
- Matrices semblables : définition et propriétés (lien avec les endomorphismes, rang, inversibilité, diagonalisabilité, valeurs propres, sous-espaces propres).

Chapitre 13 - Lois à densité usuelles

Loi uniforme

- Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
- Transformées affines d'une loi uniforme.

Loi exponentielle

- Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance et variance.

Loi normale centrée réduite

- Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition, espérance et variance.

Loi normale

- Loi normale : densité, fonction de répartition, espérance et variance.
- Transformées affines d'une loi normale. Stabilité par somme des lois normales.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
- Fonction de répartition et espérance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \Rightarrow \quad Y = a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]).$$

- Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Prochain programme : Lois à densité usuelles - Équations différentielles