— Semaine 22 —

Équations différentielles Convergence et approximation

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 14 - Équations différentielles

Équations différentielles linéaires

- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n . Équation homogène associée. Principe de superposition. Structure algébrique de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy. Trajectoires d'une équation différentielle. Trajectoires d'équilibre. Trajectoires convergentes. Si une trajectoire converge, c'est nécessairement vers une trajectoire d'équilibre.
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1. Solution de l'équation homogène. Solution de l'équation générale. Résolution avec une condition initiale.
- Équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. Solution de l'équation homogène (en utilisant l'équation caractéristique associée). Solution de l'équation générale. Résolution avec des conditions initiales.

Systèmes différentiels linéaires

- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Écriture matricielle.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy. Résolution dans le cas où la matrice associée est diagonalisable.
- Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel.
- Trajectoires d'un système différentiel linéaire. États d'équilibre. Trajectoires convergentes. Lien avec le spectre de la matrice associée au système différentiel. Cas particulier où $n = 2$.

Chapitre 15 - Convergence et approximation

Inégalités de concentration

- Inégalité de Markov. Corollaire.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.

Convergence en loi

- Convergence en loi : cas général.
- Cas des variables aléatoires discrètes. Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.
- Théorème limite central.

Approximations

- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
- Approximation de la loi binomiale par la loi normale.
- Approximation de la loi de Poisson par la loi normale.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes) et $(U_1, \dots, U_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i .

Alors l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ est :

$$S = \{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} U_1 + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n t} U_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev + Loi faible des grands nombres.
- Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

Prochain programme : Convergence et approximation - Fonctions de deux variables