

Semaine 23

## Convergence et approximation

### Fonctions de deux variables

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.
- La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.

## Chapitre 15 - Convergence et approximation

### Inégalités de concentration

- Inégalité de Markov. Corollaire.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.

### Convergence en loi

- Convergence en loi : cas général.
- Cas des variables aléatoires discrètes. Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.
- Théorème limite central.

### Approximations

- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
- Approximation de la loi binomiale par la loi normale.
- Approximation de la loi de Poisson par la loi normale.

## Chapitre 16 - Fonctions de deux variables

### L'ensemble $\mathbb{R}^2$

- Distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$  : définition et propriétés. Boules ouverts, boules fermées.
- Topologie de  $\mathbb{R}^2$  : parties ouvertes, fermées, bornées.

*La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.*

### Généralités sur les fonctions de deux variables

- Définition d'une fonction de deux variables. Cas particuliers des fonctions polynomiales, coordonnées, affines.
- Graphe d'une fonction de deux variables.
- Lignes de niveau.

## Continuité

- Continuité d'une fonction de deux variables.
- Opérations sur les fonctions continues.

## Dérivées partielles d'ordre 1

- Dérivées partielles d'ordre 1. Gradient.
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . La classe  $\mathcal{C}^1$  implique la continuité. Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Développement limité d'ordre 1. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

## Dérivées partielles d'ordre 2

- Dérivées partielles d'ordre 2. Matrice hessienne.
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . La classe  $\mathcal{C}^1$  implique la classe  $\mathcal{C}^1$ . Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . Théorème de Schwarz.
- Développement limité d'ordre 2. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

## Extrema d'une fonction de deux variables

- Extrema locaux, globaux.
- Points critiques. Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert.
- Condition suffisante d'extremum local sur un ouvert.
- Fonctions continues sur un fermé borné.

## Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Inégalité de Markov (démonstration dans le cas discret et dans le cas continu).
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev + Loi faible des grands nombres.
- Convergence en loi de lois binomiales vers la loi de Poisson.

*Prochain programme : Fonctions de deux variables - Estimation*