Semaine 9

Étude locale de fonctions - Chaînes de Markov

L'interrogation orale se déroulera en deux étapes :

- *L'énoncé de définitions et/ou de propriétés du cours et une preuve de cours.*
- *La résolution d'exercices proposés par le professeur colleur.*

Chapitre 6 - Étude locale de fonctions

Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

- Négligeabilité au voisinage d'un point : définition, règles de calculs sur les petits-o, croissances comparées.
- Équivalence au voisinage d'un point : définition, lien équivalence/petit-o, équivalents usuelles, opérations sur les équivalents, équivalents et limites.

Développement limité au voisinage d'un point

- Développement limité à l'ordre 1 : définition, unicité, formule de Taylor-Young à l'ordre 1.
- Développement limité à l'ordre 2 : définition, unicité, formule de Taylor-Young à l'ordre 2, lien entre les développements limités d'ordre 1 et 2.
- Calculs de développements limités : développements limités usuelles au voisinage de 0, opérations sur les développements limités.
- Applications : pour trouver des équivalents ou des limites, pour trouver l'équation d'une tangente ou pour trouver l'équation d'une asymptote.

Chapitre 7 - Chaînes de Markov

Théorie des graphes

- Définitions : sommet, arête, boucle, sommet isolé, sommets adjacents, ordre d'un graphe, degré d'un sommet. Formule d'Euler. Graphe complet.
- Définitions : chaîne, chaîne fermée, cycle, longueur d'une chaîne, distance entre deux sommets, diamètre d'un graphe, chaîne eulérienne, cycle eulérien, graphe eulérien, graphe connexe. CNS d'existence d'une chaîne eulérienne. Caractérisation des graphes eulériens.
- Définition de la matrice d'adjacence d'un graphe. Nombre de chaînes de longueur d entre deux sommets. CNS de connexité.
- Graphes orientés.
- Graphe pondéré. Algorithme de Dijkstra.

Chaînes de Markov

- Définition d'une chaîne de Markov. Graphe probabiliste associé à une chaîne de Markov.
- Définition d'un vecteur-ligne stochastique, d'une matrice stochastique par ligne. Si A est stochastique par ligne, alors 1 est valeur propre de A et de ${}^tA$.

- Définition du n-ième état probabiliste U_n et de la matrice de transition A associés à une chaîne de Markov. U_n est un vecteur-ligne stochastique et A est une matrice stochastique par ligne. Graphe associé à une stochastique par ligne. Loi d'une chaîne de Markov : $U_{n+1} = U_n \times A$ et $U_n = U_0 \times A^n$.
- Définition et propriétés d'un état stable U associé à une chaîne de Markov.
- Simulation informatique d'une chaîne de Markov.

Preuves de cours

Chaque étudiant devra démontrer l'une des propriétés suivantes :

- Unicité du développement limité à l'ordre 1 :

  S'il existe, le développement limité à l'ordre 1 en x_0 d'une fonction est unique.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

- Développements limités usuels au voisinage de 0 :
  - $e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
  - $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$
- Propriétés des matrices stochastiques :
  - Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique par ligne, alors 1 est valeur propre de A et donc de ${}^tA$.
  - Le n-ième état probabiliste U_n est un vecteur-ligne stochastique.
  - La matrice de transition A est une matrice stochastique par ligne.
- Loi d'une chaîne de Markov :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n \times A \quad \text{ce qui donne par récurence} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 \times A^n.$$

Prochain programme : *Chaînes de Markov - Espaces vectoriels*