Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2012-2013
M2 CAPES

TD : Algèbre linéaire

Exercice 1 Ecrire les matrices des endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique :

1. la projection sur le plan $x + y + z = 0$ dans la direction $Vect(1, 0, 1)$.
2. la symétrie par rapport à la droite $Vect(1, 2, 1)$ dans la direction du plan $x + 2y + z = 0$.

Exercice 2 On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E. Etablir que :

1. l'égalité $Ker(f) = Ker(f^2)$ équivaut à $Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$,
2. l'égalité $Im(f) = Im(f^2)$ équivaut à $E = Im(f) + Ker(f)$.
3. Etablir l'équivalence des propriétés 1. et 2. lorsque E est de dimension finie.

Exercice 3 Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Etablir, dans ce cas, que $Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$ et $Im(p + q) = Im(p) + Im(q)$.

Exercice 4 *Endomorphismes nilpotents (ou dont une puissance est nulle)*
On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p, c'est-à-dire tel que :

$$f^p = 0 \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0.$$

1. On désigne par x_0 un vecteur tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre dans E.
2. Montrer, pour un endomorphisme nilpotent d'indice p, la suite d'inclusions strictes :
   $$\{0_E\} \subsetneq Ker(f) \subsetneq Ker(f^2) \subsetneq \dots \subsetneq Ker(f^{p-1}) \subsetneq Ker(f^p) = E.$$
3. Montrer que $Id + f$ est inversible et préciser $(Id_E + f)^{-1}$.
   Etendre ce résultat au cas de $u + f$ où u est un automorphisme commutant avec f.
4. On suppose dans la suite de l'exercice que l'espace E est de dimension finie.
   Etudier les valeurs possibles de l'indice p ?
   En déduire que $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $f^{dim(E)} = 0$.
5. Etablir, si f est nilpotent, qu'il est d'indice $dim(E)$ si et seulement si $dim(Ker(f)) = 1$.
   Etablir alors que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{dim(E)-1}(x_0))$ est une base de E et préciser la matrice de f dans celle-ci.

Exercice 5 *Expression des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de la trace*

1. Etablir, pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qu'il existe une unique matrice A telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = tr(AM)$.
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles.

Exercice 6 On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit (avec $b \neq 0$) :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique et ses sous-espaces propres.
2. Déterminer son polynôme minimal.

Exercice 7 On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. Montrer que les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), Me_1, M^2e_1, \ldots, M^{n-1}e_1$ sont libres.
3. En déduire que le polynôme minimal de M est égal à son polynôme caractéristique.

Exercice 8 *Recherche des éléments propres d'un endomorphisme de* $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

On associe à toute fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ la fonction $Tf : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$Tf(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que $T : f \mapsto Tf$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Exercice 9 Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer dans chacun des cas une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale ou triangulaire.

Exercice 10 On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Calculer les puissances de M et en déduire à quelle condition M est diagonalisable.

Exercice 11 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux.

1. Si les f_i sont diagonalisables, montrer que l'on peut les diagonaliser tous dans une même base.
2. Si les f_i sont trigonalisables, montrer que l'on peut les trigonaliser tous dans une même base.

Exercice 12

1. Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e$. Montrer que G est abélien.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in G,\ A^2 = I_n$. Montrer que $Card(G) \leq 2^n$ (on montrera qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in G,\ P^{-1}AP$ est diagonale).
3. Montrer que les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes si $n \neq m$.

Exercice 13

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Que dire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton grâce à 1.

Exercice 14 On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

1. Etablir qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
2. Etablir que les deux sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$ des fonctions paires et impaires sur $[-1,1]$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire ?
3. En déduire la distance d'une fonction continue f aux sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$.

Exercice 15 *Polynômes de Laguerre*
On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

On admettra que ceci est bien défini et que c'est un produit scalaire.

1. On pose $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$ pour tout entier naturel n.
   Calculer $\langle L_n, X^p\rangle$ pour $p < n$ puis pour $p = n$.
   En déduire que L_n est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $\| L_n \|$.
2. Etablir l'existence de réels $p_0, \ldots, p_n$ (on précisera p_0) tels que :
   $$(X-1)(X-2)\ldots(X-n) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k (X+1)(X+2)\ldots(X+k).$$
   Vérifier que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ est orthogonal à $Vect(X, X^2, \ldots, X^n)$.
3. En déduire la distance du polynôme 1 au sous-espace $Vect(X, X^2, \ldots, X^n)$.
4. Déterminer de même la distance de X^n au sous-espace $Vect(1, X, \ldots, X^{n-1})$.