

## Révisions de première année

Dans chaque feuille de TD, les exercices sont classés par niveau de difficulté :

★ : facile (application directe du cours),      ★★ : intermédiaire,      ★★★ : difficile.

### Sommes et produits

#### Exercice 1 (★)

Calculer les sommes suivantes ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$(1) \sum_{k=1}^n (3k^2 + 4k - 1)$$

$$(2) \sum_{k=n}^{3n} k^2$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{n-k}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}}$$

$$(5) \sum_{k=1}^n \left( k^2 + 3 \times \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right)$$

$$(6) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

#### Exercice 2 (★)

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

2. En déduire l'expression de  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 3 (★★)

On se propose de calculer, pour tout entier  $n \geq 2$ , la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

1. Montrer que pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{5}{k} - \frac{2}{k-1} - \frac{3}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 4 (★)

Calculer les produits suivants ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$(1) \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$(2) \prod_{k=1}^n \frac{2^{2k}}{5^k}$$

$$(3) \prod_{k=n}^{2n} \frac{3^k}{4^{k-n}}$$

#### Exercice 5 (★)

A l'aide de la formule  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , démontrer les relations suivantes :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
  3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ .
  4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .
- 

**Exercice 6 (★★)**

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \quad (2) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad (3) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} \quad (4) \sum_{k=0}^n 2^k k^2 \binom{n}{k}$$


---

**Exercice 7 (★)**

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \quad (2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \quad (3) \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} \quad (4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$


---

**Exercice 8 (★★)**Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \quad (2) \sum_{0 \leq p \leq k \leq n} 3^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$


---

**Suites réelles****Exercice 9 (★)**Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_{n+1} = u_n + 4n + 1$  et  $u_0 = 1$ .

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle arithmétique ?
  2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle arithmétique ?
  3. Donner une expression de  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  en fonction de  $n$ .
  4. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_{n+1} - u_0$ .
  5. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 

**Exercice 10 (★)**Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

On introduit les deux suites auxiliaires  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant :  $z_n = u_n + v_n$  et  $t_n = 2u_n - v_n$ .

1. Montrer que les deux suites  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont géométriques.

2. Donner l'expression de  $z_n$  et de  $t_n$  en fonction de  $n$ .
3. En déduire l'expression de  $u_n$  et de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 11 (★★)**

On étudie les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

1. A quel type de suite remarquable appartient  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?  
En déduire une expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ .
2. Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ .
  - (a) Justifier que  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$  et préciser son premier terme.
  - (b) En déduire une expression de  $c_n$  puis de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
3. Application au calcul d'une somme.
  - (a) Justifier que les termes de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k.$$

- (b) Montrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}.$$

- (c) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $\sum_{k=0}^n 2^k$ .

- (d) Déduire des questions précédentes qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

**Exercice 12 (★)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4^n$ .

1.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle une suite arithmético-géométrique ?
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \frac{u_n}{4^n}$ .

$$\text{Vérifier que : } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}.$$

3. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $u_n$ .

**Exercice 13 (★)**

On considère les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = 0, y_0 = -1$  et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -6x_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ .
2. En déduire l'expression de  $x_n$ , puis de  $y_n$ , en fonction de  $n$ .

**Exercice 14 (★)**

On définit les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 7, u_1 = -12 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n - 24 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 4.$$

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suit-elle une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ?
2. Démontrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 qui vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n.$$

3. En déduire l'expression de  $v_n$ , puis celle de  $u_n$ , en fonction de l'entier naturel  $n$ .

**Exercice 15 (★)**

Étudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{lll} a_n = \frac{e^n}{\ln(n)} & b_n = e^{n+\frac{1}{n}} & c_n = \frac{e^{-n}}{n^2} \\ d_n = \frac{n^2 + 2n + 2}{2n^2 + 1} & e_n = \frac{e^n + n^2}{e^{2n} - n} & f_n = \frac{n + \sqrt{n+1}}{1-n} \\ g_n = e^{-3n^2+2n} & h_n = \ln(n^2 + 2n + 2) - \ln(n^2 + 1) & i_n = \frac{n^2 + \ln(n) - \sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \\ j_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2n} & k_n = \sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1} & l_n = \frac{n + \ln(n)}{\sqrt{2n^2 + 1}} \end{array}$$

**Exercice 16 (★★)**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite monotone.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite  $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ .
4. En passant à la limite dans la relation  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$ , en déduire la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 17 (★★)**

On considère les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par

$$v_0 = 1, w_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. On pose  $t_n = v_n - w_n$ .
  - (a) Montrer que  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
  - (b) Exprimer  $t_n$  en fonction de  $n$ .

- (c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \leq w_n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n)$ .
2. (a) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
 (b) Montrer que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite notée  $\ell$ .
3. On pose  $s_n = v_n + w_n$ .  
 (a) Montrer que la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.  
 (b) En déduire la valeur de  $\ell$ .
- 

### Exercice 18 (★★)

On considère les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 2$  et que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (1)$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont bien définies et strictement positifs.
2. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2$ .  
 En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ .  
 (b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \sqrt{a_n}$ .  
 En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.  
 (c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} (a_n - b_n)$ .  
 En déduire que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
3. (a) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 2.  
 En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera  $\ell_1$ .  
 (b) Montrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1.  
 En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera  $\ell_2$ .  
 (c) En passant à la limite dans les relations (1), montrer que  $\ell_1 = \ell_2$ .
- 

### Exercice 19 (★★)

Soient  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  les suites définies par :

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  convergent vers une même limite notée  $\ell$ .
2. (a) Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}$ .  
 (b) En déduire une expression simplifiée de  $u_n$ .  
 (c) En déduire la valeur de  $\ell$ .
-

## Fonctions réelles d'une variable réelle

### Exercice 20 (★)

1. On considère le polynôme  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ .

- Montrer que 1 est racine de  $P$  et déterminer  $Q$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)Q(x)$ .
- Montrer que 1 est racine de  $Q$  et déterminer  $R$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x - 1)R(x)$ .
- En déduire une factorisation de  $P$ .

2. On souhaite résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$(I) \quad x + \frac{10}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2+1} \leq 3$$

- Écrire l'expression  $x + \frac{10}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2+1} - 3$  sous la forme d'une unique fraction.
- Résoudre alors l'inéquation (I) sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 21 (★)

Déterminer les limites suivantes (en précisant si on utilise le théorème des croissances comparées) :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\ln(x))^2}$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{1/\ln(x)}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x}$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

### Exercice 22 (★★)

Calculer les limites suivantes (distinguer éventuellement limite à gauche et limite à droite) :

$$(1) \quad \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} \text{ en } 1 \text{ et } +\infty$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ en } -1 \text{ et } -\infty$$

$$(3) \quad \sqrt{x^2 + 3x - 1} + (x + 1) \text{ en } -\infty$$

$$(4) \quad x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0$$

$$(5) \quad \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty$$

$$(6) \quad \frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty$$

$$(7) \quad \frac{x}{x-1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{ en } 0 \text{ et } 1$$

$$(8) \quad \frac{[x]}{x} \text{ en } 0 \text{ (où } [x] \text{ est la partie entière de } x)$$

### Exercice 23 (★)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition (en précisant s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales) et la fonction dérivée :

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$$

$$h(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$i(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$j(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$$

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$l(x) = \ln(3 - \sqrt{x})$$

$$m(x) = x^{1/x}$$

$$n(x) = (3-x)^{\ln(x)}$$

**Exercice 24 (★★)**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 2x^2 + 2}{x}.$$

On notera  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ . Préciser si  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote horizontale ou verticale.
3. (a) Calculer la dérivée de  $f$ , en précisant sur quel ensemble  $f$  est dérivable.  
 (b) On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g(x) = 2x^2 - \ln(x) - 1$ . Étudier les variations de  $g$ .  
 (c) À l'aide de son tableau de variation, prouver que  $g$  admet un minimum, calculer la valeur de ce minimum et justifier que ce minimum est strictement positif (on rappelle que  $\ln(2) > \frac{1}{2}$ ).  
 En déduire le signe de  $g$ .  
 (d) En déduire le signe de la dérivée de  $f$  puis tracer le tableau de variation de  $f$ .
4. (a) Déterminer le réel  $a$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ .  
 (b) Déterminer le réel  $b$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ .  
 (c) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique, notée  $\Delta$ , au voisinage de  $+\infty$  dont on précisera l'équation.  
 (d) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\Delta$ .
5. Tracer  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthonormé (on pourra utiliser que  $\exp(-2) = 0.14$ ).

**Exercice 25 (★★)**

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (1 - x)e^x + 1$ .  
 (a) Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) Justifier que  $\alpha \in [1, 2]$ .  
 (d) Déduire des questions précédentes le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. (a) Déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de  $f$ .  
 (b) Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ .  
 (c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .  
 (d) Montrer que :  $f(\alpha) = \alpha - 1$  (on rappelle que, par définition de  $\alpha$ ,  $g(\alpha) = 0$ ).
3. (a) Vérifier que la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  en 0 a pour équation  $y = \frac{1}{2}x$ .  
 (b) On considère la fonction  $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ . Déterminer le signe de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de  $T$ .
4. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $T$  dans un même repère orthonormé (on utilisera le fait que  $\alpha \simeq 1.28$ ).

**Exercice 26 (★)**

On considère la fonction  $f(x) = x + \ln(x)$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que l'équation  $x + \ln(x) = 2005$  admet une seule solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$  et vérifier qu'on a l'encadrement :  $1997 \leq \alpha \leq 1998$ .

Valeurs numériques :  $\ln(1997) \simeq \ln(1998) \simeq 7.6$ .

---

**Exercice 27 (★★)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ . On étudiera également sa parité.
  2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  à expliciter.
  3. On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Préciser les variations de  $f^{-1}$  sur  $J$  ainsi que ses limites aux bornes de  $J$ .
  4. Soit  $y \in J$ . Déterminer un antécédent de  $y$  par  $f$ . En déduire  $f^{-1}$ .
- 

**Exercice 28 (★★)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  et  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

1. Déterminer les ensembles de définition de  $f$  et  $g$ .
  2. Étudier les variations de  $f$  et de  $g$ .
  3. Démontrer que  $g$  est la bijection réciproque de  $f$ .
- 

**Exercice 29 (★)**

1. Étudier la continuité de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ x \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1/x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Donner les ensembles de définition et de continuité des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{2}{1 + e^{-1/x^2}} \quad h(x) = \ln(x)^{\ln(x)}.$$

Peut-on prolonger ces fonctions par continuité ?

---

**Exercice 30 (★)**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ .

1. Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de  $f$ .
  2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On notera encore  $f$  le prolongement obtenu.
  3. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
-



**Exercice 31 (★★)**

1. Montrer que la fonction  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln(\ln(x))$  est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in ]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

---

**Exercice 32 (★★)**

On définit sur  $]0, +\infty[$  la fonction  $f$  par  $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$ .

1. Justifier que  $f$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .
  2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée. On appellera toujours  $f$  la fonction prolongée, définie sur  $[0, +\infty[$ .
  3. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.  
Quelle est l'allure de la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x = 0$  ?
  4. Dresser le tableau de variation de  $f$ , en précisant valeurs et limites aux bornes.
  5. Étudier la convexité de  $f$  (on étudiera également les éventuels points d'inflexions).
  6. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
-