TD 0

Révisions de première année

Dans chaque feuille de TD/TP, les exercices sont classés par niveau de difficulté :

★ : facile (application directe du cours), ★★ : intermédiaire, ★★★ : difficile.

Sommes et produits

Exercice 1 (★)

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k-1)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n}k^2$ (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 3^{n-k}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}}$ (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$ (6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

Exercice 2 (★)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}.$$

2. En déduire l'expression de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ en fonction de n.

Exercice 3 (★★)

On se propose de calculer, pour tout entier $n \geq 2$, la somme suivante :

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)}=\frac{5}{k}-\frac{2}{k-1}-\frac{3}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 4 (★)

Calculer les produits suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

(1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ (2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{5^k}$ (3) $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n}\frac{3^k}{4^{k-n}}$

Exercice 5 (★)

A l'aide de la formule $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, démontrer les relations suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exercice 6 (★)

Soient n, p, k trois entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

2. En déduire que :
$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{p-1} + \ldots + \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{0} = 2^p \times \binom{n}{p}.$$

Exercice 7 (★★)

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{2^{n-k}} \qquad (2) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \qquad (3) \sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k} \qquad (4) \sum_{k=0}^{n} 2^k k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 8 (★)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \qquad (2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \qquad (3) \sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^{i+j} \qquad (4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 9 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$(1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \qquad (2) \sum_{0 \leq p \leq k \leq n} 3^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{p}$$

Suites réelles

Exercice 10 (★)

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 4v_n \end{array} \right.$$

1. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

2. A l'aide de la question précédente, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.

3. Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \frac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 11 (★)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 4^n$.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmético-géométrique ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{4^n}$.

   Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 12 (★)

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -6x_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
2. En déduire l'expression de x_n, puis de y_n, en fonction de n.

Exercice 13 (★)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 7,\ u_1 = -12 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n - 24 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 4.$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit-elle une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ?
2. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 qui vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n.$$

3. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 14 (★)

Étudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

$$a_n = \frac{e^n}{\ln(n)} \qquad b_n = e^{n+\frac{1}{n}} \qquad c_n = \frac{e^{-n}}{n^2}$$

$$d_n = \frac{n^2+2n+2}{2n^2+1} \qquad e_n = \frac{e^n+n^2}{e^{2n}-n} \qquad f_n = \frac{n+\sqrt{n+1}}{1-n}$$

$$g_n = e^{-3n^2+2n} \qquad h_n = \ln(n^2+2n+2) - \ln(n^2+1) \qquad i_n = \frac{n^2+\ln(n)-\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$$

$$j_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n} \qquad k_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n+1} \qquad l_n = \frac{n+\ln(n)}{\sqrt{2n^2+1}}$$

Exercice 15 (★)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la convergence des suites $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ puis $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 16 (★★)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite $\ell \in [\dfrac{1}{2}, 1]$.
4. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$, en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 17 (★★)

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, ainsi que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et que $0 < u_n < v_n$.
2. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2.
   (c) Justifier que $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = 1$.
   (b) En déduire que $\ell_2 = 1 + \ell_1$.
   (c) En passant à la limite dans les relations de récurrence, montrer que $\ell_1 = 0$ puis que $\ell_2 = 1$.

Exercice 18 (★★)

On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1,\ w_0 = 2 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \ \text{ et } \ w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. On pose $t_n = v_n - w_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq w_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n)$.
2. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ.
3. On pose $s_n = v_n + w_n$.
   (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 19 (★★)

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)\sqrt{a_n}$.
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.
   En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1.
   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2.
   (c) En passant à la limite dans les relations (1), montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 20 (★★)

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ les suites définies par :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ convergent vers une même limite notée ℓ.
2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de u_n.
   (c) En déduire la valeur de ℓ.

Fonctions réelles d'une variable réel

Exercice 21 (★)

1. On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.
   (a) Montrer que 1 est racine de P et déterminer Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
   (b) Montrer que 1 est racine de Q et déterminer R tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x-1)R(x)$.
   (c) En déduire une factorisation de P.
2. On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I) \quad x + \frac{10}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2-1} \leq 3$$

   (a) Écrire l'expression $x + \frac{10}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2-1} - 3$ sous la forme d'une unique fraction.
   (b) Résoudre alors l'inéquation (I) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 (★)
Déterminer les limites suivantes (en précisant si on utilise le théorème des croissances comparées) :

$$(1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} \qquad (2)\ \lim_{x\to0^-} e^{1/x} \qquad (3)\ \lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}$$
$$(4)\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^x \qquad (5)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} \qquad (6)\ \lim_{x\to1}\frac{1}{(\ln(x))^2}$$
$$(7)\ \lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{\sqrt{x}} \qquad (8)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{\ln(x)}} \qquad (9)\ \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x)$$
$$(10)\ \lim_{x\to1^+} e^{1/\ln(x)} \qquad (11)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{e^x} \qquad (12)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

Exercice 23 (★★)
Calculer les limites suivantes (distinguer éventuellement limite à gauche et limite à droite) :

$$(1)\ \frac{x^2+3x-1}{x-1} \text{ en } 1 \text{ et } +\infty \qquad (2)\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ en } -1 \text{ et } -\infty$$
$$(3)\ \sqrt{x^2+3x-1}+(x+1) \text{ en } -\infty \qquad (4)\ x\exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0$$
$$(5)\ \frac{e^{2x}+e^x+x}{e^x-x} \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty \qquad (6)\ \frac{\ln(x)+x-1}{x+e^{-x}} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty$$
$$(7)\ \frac{x}{x-1}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \text{ en } 0 \text{ et } 1 \qquad (8)\ \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \text{ en } 0 \text{ (où } \lfloor x\rfloor \text{ est la partie entière de } x)$$

Exercice 24 (★)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition (en précisant s'il y a des asymptotes horizontales ou verticales) et la fonction dérivée :

$$f(x)=\ln(1+x^2) \qquad g(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-1} \qquad h(x)=\exp\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$i(x)=\sqrt{x^2+1}+x \qquad j(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right) \qquad k(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$l(x)=\ln(3-\sqrt{x}) \qquad m(x)=x^{1/x} \qquad n(x)=(3-x)^{\ln(x)}$$

Exercice 25 (★)
On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 26 (★★)
1. Montrer que la fonction $f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x,y\in]1,+\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 27 (★★)

On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée. On appellera toujours f la fonction prolongée, définie sur $[0,+\infty[$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

   Quelle est l'allure de la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$?
4. Dresser le tableau de variation de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.
5. Étudier la convexité de f (on étudiera également les éventuels points d'inflexions).
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 28 (★★)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 2x^2 + 2}{x}.$$

On notera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$. Préciser si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale ou verticale.
3. (a) Calculer la dériver de f, en précisant sur quel ensemble f est dérivable.

   (b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = 2x^2 - \ln(x) - 1$. Étudier les variations de g.

   (c) A l'aide de son tableau de variation, prouver que g admet un minimum, calculer la valeur de ce minimum et justifier que ce minimum est strictement positif (on rappelle que $\ln(2) > \frac{1}{2}$). En déduire le signe de g.

   (d) En déduire le signe de la dérivée de f puis tracer le tableau de variation de f.
4. (a) Déterminer le réel a tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.

   (b) Déterminer le réel b tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$.

   (c) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique, notée Δ, au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.

   (d) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé (on pourra utiliser que $exp(-2) = 0.14$).

Exercice 29 (★★)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(b) Écrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient et en déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}_f$?

(c) Déterminer le réel a tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ puis calculer $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}_f$?

2. (a) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis expliciter sa dérivée.

   (b) Montrer que l'équation $\frac{1+x}{1+e^x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+$ notée x_0.

   (c) Justifier que $0 < x_0 < 1$.

Exercice 30 (★★)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x + 1$.

   (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de g.

   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}$.

   (c) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On précisera les limites de f.

   (c) Montrer que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

3. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en 0.

   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et T dans un même repère orthonormé (on utilisera le fait que $\alpha \simeq 1.28$).

Exercice 31 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Étudier les variations de f. On étudiera également sa parité.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

3. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Préciser les variations de f^{-1} sur J ainsi que ses limites aux bornes de J.

4. Soit $y \in J$. Déterminer un antécédent de y par f. En déduire f^{-1}.

Exercice 32 (★★)

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g.

2. Étudier les variations de f et de g.

3. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.
