TD 1

Compléments sur les suites réelles

Relations de comparaison des suites réelles

Exercice 1 (★)

Préciser pour chacune des comparaisons suivantes, au voisinage de $+\infty$, si celle-ci est vraie ou fausse :

(1) $n^2 + e^{-n} = o(n)$ (2) $n - 2 = o(n)$ (3) $\ln(n) = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ (4) $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

(5) $n^2 + n \sim n$ (6) $\frac{e^n}{n+3} \sim e^n$ (7) $\ln(n) + n \sim n$ (8) $\frac{e^n}{n^2+1} \sim \frac{e^n}{n^2}$

Exercice 2 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   (a) $u_n = o(n^3)$ (b) $u_n \sim n^3$ (c) $u_n = o(n^4)$ (d) $u_n \sim 8n^3$ (e) $u_n = o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   (a) $u_n \sim \frac{2}{n}$ (b) $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors :

   (a) $u_{n+1} = o(u_n)$ (b) $u_{n+1} \sim u_n$

4. Si $u_n \sim v_n$, alors :

   (a) $u_n + 1 \sim v_n + 1$ (b) $2u_n \sim v_n$ (c) $-u_n \sim -v_n$
   (d) $u_n v_n \sim u_n^2$ (e) $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ (f) $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
   (g) $\lfloor u_n \rfloor \sim \lfloor v_n \rfloor$ (h) $|u_n| \sim |v_n|$ (i) $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$

Exercice 3 (★)

En utilisant la notation $\ll$ (on rappelle que $u_n \ll v_n$ si $u_n = o(v_n)$), classer par négligeabilité les termes généraux qui suivent :

(1) n, n^2, $\ln(n)$, e^n, $n\ln(n)$ et $\frac{n^2}{\ln(n)}$, (2) $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\ln(n)}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$ et $\frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 4 (★)

Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(1) $\ln(n) + 2n - 1$ (2) $\frac{(1+\ln(n))(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}}$ (3) $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

(4) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ (5) $\ln(2n^3+1)$ (6) $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2}-1}$

(7) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (8) $\ln(n+1) - \ln(n-1)$ (9) $(n+1)^n$

(10) $n(\sqrt[n]{2} - 1)$ (11) $\ln\left(\frac{n^2+3n+4}{n^2-n+1}\right)$ (12) $\ln(2 - e^{-1/n^2})$

Exercice 5 (★)

Calculer les limites quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(1) $n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{27}-1\right)$ (2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ (3) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^5}$

(4) $(n+1)(n^{1/n}-1)$ (5) $\frac{n^3(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^3+1}}$ (6) $\frac{n^{2/5}\left(1-e^{-1/n}\right)}{7-4\ln(n)}$

Exercice 6 (★★)

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

2. En déduire, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 7 (★★)

1. Soit (u_n) une suite vérifiant :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 2n^3-n\ln(n)\leq u_n\leq 2n^3+n\sqrt{n}+6.$$
Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

2. Soit (v_n) une suite vérifiant :
$$\forall n\geq 2,\quad n\ln(n)\leq v_n\leq 2n\ln(n).$$
Donner un équivalent simple de $\ln(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8 (★★)

On définit la suite (u_n) par $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\frac{u_n}{n+1}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $1\leq u_n\leq 2$.
   (b) Montrer que (u_n) converge vers 1.

2. Déterminer un équivalent de u_n-1, et en déduire un réel a tel que $u_n-1=\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9 (★★★)

Le but de cet exercice est de démontrer les croissances comparées du cours : $q^n=o(n!)$ et $n!=o(n^n)$.

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe $\lambda\in]0;1[$ et $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant
$$\forall n\geq n_0,\ u_{n+1}\leq\lambda u_n.$$
Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2. Soit $q>1$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{q^n}{n!}$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   (b) Justifier qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{2}$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

   (d) Conclure.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

   (b) Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire que la suite (v_n) converge vers 0.

   (d) Conclure.

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 10 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble I de définition (à déterminer). Préciser le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis au point d'abscisse 1.

   (b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$. Étudier les cas d'égalité.

   (c) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D} : y = x$ dans le même repère.

2. (a) Démontrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble à déterminer.

   (b) Expliciter la bijection réciproque f^{-1} de f et dresser son tableau de variations.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n}{2-u_n}}$.

   (a) Tracer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique de la question 1.(c).

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

   (c) Étudier la monotonie de (u_n).

   (d) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 (★★)

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1 + x)$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \in]e - 1, +\infty[$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.

   (b) En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, e - 1[$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq u_n < e - 1$.

   (b) Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 12 (★★)

On étudie la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n \ln(u_n)$.

1. Étudier la fonction f définie par : $f(x) = -x \ln(x)$.
   Vérifier que l'intervalle $I =]0, \frac{1}{e}[$ est stable par f.
2. Cas $u_0 \geq 1$: La suite est-elle bien définie ?
3. Cas $u_0 = \dfrac{1}{e}$: Calculer u_1. Que peut-on dire de la suite ?
4. Cas $u_0 \in]0, \frac{1}{e}[$:
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, \frac{1}{e}[$.
   (b) Comparer u_0 et u_1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Prouver que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Cas $u_0 \in]\frac{1}{e}, 1[$: Encadrer u_1. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 13 (★★)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 4u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $1 \leq u_n \leq 5$.
2. Déterminer la seule limite finie possible de (u_n).
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 5| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 5|$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 5| \leq 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 (★★)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x)$$

1. Étude de la fonction f :
   (a) Dresser le tableau de variation de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
   (c) Montrer que $b \in [2, 4]$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
2. Étude d'une suite :
   On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq b$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 15 (★★)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre numériquement l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E): \quad x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

1. (a) Montrer que l'équation (E) a une seule solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera α.
   (b) Montrer que $\alpha \in [1/3, 1]$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

   (a) Montrer que α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
   (b) Montrer que, si x appartient à $[1/3, 1]$, alors $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.
   Pour cela, on pourra commencer par étudier les variations de f sur $[1/3, 1]$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{135}{169}$.
   Pour cela, on pourra commencer par étudier les variations de f' sur $[1/3, 1]$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/3, 1]$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{135}{169}|u_n - \alpha|.$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n.$$

   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 16 (★★★)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{6}{u_n}$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{6}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D} : y = x$ dans un même repère.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
   (c) Tracer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique de la question 1.
   Est-ce que (u_n) est monotone ?

2. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et que $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
   (b) Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 3$. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
   (d) Montrer que (w_n) converge également et déterminer sa limite.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 17 (★★★)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)^2$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Vérifier que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
   (c) Déterminer les points fixes de la fonction f.
   (d) Préciser le sens de variation de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0,1]$.
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. (a) Démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Préciser leur monotonie.
   (b) Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   (c) Déterminer ℓ_1 et ℓ_2.
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Suites implicites

Exercice 18 (★★)

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On considère à présent pour tout n entier naturel non nul l'équation :

$$(E_n) \qquad f(x) = \frac{1}{n^2}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) a une unique solution strictement positive. On la notera α_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \geq \frac{1}{n^2}$.
   (c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante et convergente.
   (d) Déterminer la limite de la suite (α_n) puis montrer que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 19 (★★)

On considère la fonction $f(x) = e^x - x$.

1. (a) Étudier les variations de f. On précisera les limites en $\pm\infty$.
   (b) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet la droite Δ d'équation $y = -x$ comme asymptote oblique en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
   (c) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ possède exactement deux solutions de signes contraires.

   On notera α_n la solution positive de cette équation et β_n la solution négative.
3. (a) Étudier les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\alpha_n \geq \ln(n)$.
   (c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.

4. (a) Étudier les variations de la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $-n \leq \beta_n \leq -n+1$.
   (c) En déduire que : $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.

Exercice 20 (★★)

On considère la fonction $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie et la limite de la suite (x_n).
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq \ln(n)$.
   En déduire que : $\forall n \geq 1$, $\ln(n - \ln(n)) \leq x_n$.
5. En déduire un équivalent de x_n en $+\infty$.

Exercice 21 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \dfrac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > -1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et convergente.
5. Calculer la limite ℓ de la suite (x_n).

Exercice 22 (★★)

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n + 2x - 2$.

1. (a) Déterminer les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Quelles sont les valeurs de α_1 et α_2 ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in [0, 1]$.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite (α_n).
5. Montrer que la suite (α_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$ (qu'on ne cherchera pas à déterminer).
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{2 - (\alpha_n)^n}{2}$.
7. On suppose que la limite ℓ est différente de 1.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq \alpha_n \leq \ell$.

(b) Que vaut alors $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n$?

(c) En déduire la limite de la suite (α_n), constater une contradiction puis conclure.

Exercice 23 (★★)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
4. (a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n). On note ℓ sa limite.
5. (a) Encadrer $(u_n)^n$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$.
   (b) En déduire la limite de $(4 - 9u_n^2)$ puis expliciter ℓ.

Exercice 24 (★★)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 3. On note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

1. Étudier les variations de f_n.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0 < u_n < n < v_n$.
3. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$?
4. (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis que (u_n) est décroissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ e^{1/n} < u_n < e^{e/n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 25 (★★)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $\mathscr{C}_n$.
   (c) Donner l'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A_1 puis tracer T_1 ainsi que l'allure de la courbe $\mathscr{C}_1$.
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$, puis montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.
