TD1

Espaces vectoriels

Sauf précision supplémentaire, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui est soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. La lettre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Rappels de cours

- Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples de $\mathbb{K}^n$. Autres exemples. Définition d'un sous-espace vectoriel.

  Savoir faire : Comment montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ?

- Somme et intersection de 2 sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (notation $Vect$).

- Famille de vecteurs libre/liée, famille génératrice de E. Base de E. Théorème d'existence et de même cardinalité des bases ("Théorème de la base incomplète"). Dimension de E. Exemple de $\mathbb{K}^n$.

  Savoir faire : Comment montrer qu'une famille est libre? génératrice? une base?

- Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Dimension de $F + G$. Définition de F et G sont en somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Base de $F \oplus G$.

  Savoir faire : Comment montrer que $F \oplus G = E$?

- Produit cartésien d'espaces vectoriels. Base et dimension de $E \times E'$.

Anthony Mansuy
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr` - E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Exercice 1

Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

- Tracer la figure dans un repère du plan.
- En prenant 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant au sous-ensemble, tracer $\vec{u}+\vec{v}$ (faire plusieurs exemples).
- En prenant un vecteur $\vec{u}$ du sous-ensemble et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, tracer $\lambda\vec{u}$ (faire plusieurs exemples).
- Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
- Vérifiez en utilisant une équation donnant le sous-ensemble.

1. La droite passant par l'origine et de pente 1.
2. La droite passant par $(0,1)$ et de pente 1
3. Le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
4. L'union de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

Exercice 2

Les ensembles E suivants, munis de leurs opérations usuelles, sont ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$;

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xy \geq 0\}$;

d) $\{(x,x+y,x+y+z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$;

e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone }\}$;

f) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$;

g) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(1)=0\}$;

h) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ f(2)=3f(4)\}$;

i) $\{P \in \mathbb{R}[X]\ ;\ P(1)=P'(1)=0\}$;

j) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$;

k) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a+d=0\right\}$.

Exercice 3

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y-z=0\} \quad ; \quad F = \{(x,x,-x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.

b) On pose $u=(1,-1,1)$ et $v=(3,1,7)$. Montrer que $Vect(u,v) \subset E$. A-t-on égalité?

Exercice 4

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u=(1,2,1),\ v=(1,1,-1),\ w=(3,4,-1).$$

Soit $G = \text{Vect}(u,v,w)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w.

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y et z pour que le vecteur (x,y,z) appartienne à G.
2. Le vecteur $(2,3,1)$ appartient-il à G?

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = Vect((2,3,-1),(1,-1,-2)) \text{ et } G = Vect((3,7,0),(5,0,-7)).$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 6

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose :

$$f_k(x) = \cos(kx) \quad ; \quad g_k(x) = \cos^k(x).$$

a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Montrer qu'on a la relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

b) Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, et préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

c) En déduire l'égalité des sous-espaces $Vect(f_0, f_1, \ldots, f_n) = Vect(g_0, g_1, \ldots, g_n)$.

Exercice 7

1. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
   Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=0\}$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-2y=0\}$.
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Trouver un vecteur générateur de F et de G, puis représenter graphiquement F et G.
   (c) $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E? Justifier votre réponse.
   (d) Décrire les sous-espaces vectoriels $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}$-e.v.. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 9

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G.$$
2. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F \subset G \Rightarrow F + (G \cap H) = (F+G) \cap (F+H).$$

Exercice 10

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans E?

a) $((1,1,0),(0,1,1))$ (où $E=\mathbb{R}^3$);

b) $((1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,-1))$ (où $E=\mathbb{R}^3$);

c) $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_2 : x \mapsto \cos x$, $f_3 : x \mapsto 1$ (où $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$);

d) $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$, où $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ (où $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$);

e) $(3, X^2+1, X^5-3X^2+2)$ (où $E=\mathbb{R}[X]$);

f) $(X^k(X-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ (où $E=\mathbb{R}[X]$).

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $a,b,c\in E$. On pose :

$$u=b+c,\ v=c+a,\ w=a+b.$$

Montrer que :

$$(a,b,c) \text{ est libre} \Leftrightarrow (u,v,w) \text{ est libre.}$$

Exercice 12

Soient $e_1=(1,1,2,2)$, $e_2=(1,1,1,1)$, $e_3=(1,2,3,4)$, $e_4=(1,-1,1,1)$.

a) Montrer que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Quelles sont les coordonnées de $(4,3,2,1)$ dans cette base.

Exercice 13

Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. Soient $P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n$ des polynômes de degrés (strictement) égaux à $0,1,2,\ldots,n$ respectivement. Montrer que $\{P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ forment une famille libre de E.
2. Trouver une famille génératrice de E avec $n+1$ éléments. En déduire la dimension de E.
3. Que peut-on dire sur la dimension de l'espace vectoriel formé de tous les polynômes?
4. En déduire que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 14

a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{K}$. Montrer que la famille $((X-a)^k)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et calculer les coordonnées de $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_0,\ldots a_n\in\mathbb{K}$ des éléments deux à deux distincts. On note L_i le i-ème polynôme de Lagrange associé aux a_j, défini par $L_i\in\mathbb{K}_n[X]$ et $L_i(a_j)=\delta_{i,j}$.

Montrer que la famille $(L_i)_{0\le i\le n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et calculer les coordonnées de $P\in\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 15

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u=(1,0,2)$, $v=(1,1,2)$, $w=(1,2,2)$, $t=(2,2,2)$.

a) Montrer que (u,v,w,t) est générateur de $\mathbb{R}^3$.

b) En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16
Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille (e_1, e_2) avec $e_1 = (1,1,1,1) \quad e_2 = (1,1,-1,-1)$.

Exercice 17
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$;

c) $E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y=0, y+z=0, z+t=0, t+x=0\}$;

d) $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1)=0\}$;

e) $E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$;

f) $E_6 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\}$;

g) $E_7 = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) | y'' - 2y' + 5y = 0\}$.

Exercice 18
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On note $f_{a,b,c}$ la fonction définie par
$$f_{a,b,c}(x) = a\sin(x)\cos(2x) + b\sin(2x)\cos(x) + c\sin(x)\ .$$
On pose $F = \{f_{a,b,c} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Développer $\sin^3(x)$ pour vérifier que la fonction $\sin^3$ appartient à F.
En déduire que $Vect(\sin, \sin^3) \subset F$.
3. Montrer que $F = Vect(\sin, \sin^3)$.
4. Montrer que $\{\sin, \sin^3\}$ est une base de F.

Exercice 19
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants : $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,1,-1,0)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u_4 = (0,0,1,0)$ et $u_5 = (1,1,0,-1)$. On note $F = Vect(u_1,u_2,u_3)$, $G = Vect(u_4,u_5)$ et $H = Vect(u_4)$.

1. Décrire par des équations (linéaires homogènes) les sous-espace vectoriel F, G et H.
2. Montrer que la famille $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire que $F \cap H = \{0_E\}$, et ensuite que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.
4. Exprimer u_5 dans la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, et en déduire une description de $F \cap G$.
5. Calculer, notamment à l'aide de la question précédente, les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$. Vérifier dans cet exemple particulier une formule que vous connaissez.

Exercice 20
Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, on note :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}\ ,$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid \exists a \in \mathbb{C} \text{ tel que } x = a,\ y = a,\ z = -2a\}\ ,$$
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid \exists a,b \in \mathbb{C} \text{ tel que } x = a,\ y = b,\ z = -3a + b\}\ .$$

1. Donner la dimension et une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G, H.
2. Montrer que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$.
3. Montrer que $G \subset H$. Peut-on en déduire que $\mathbb{C}^3 = F + H$? Peut-on en déduire que $\mathbb{C}^3 = F \oplus H$?

Exercice 21

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u = (1,2,1,0)$ et on note $F = Vect(u)$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - t = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 22

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

a) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \; ; \; P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

b) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $G = \mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

c) $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente$\}$, $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle$\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constante$\}$.

Exercice 23

Dans $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$,, on pose :

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f = 0, \; f(0) = 0, \; f'(1) = 0\} \quad ; \quad G = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.