# Exercices du chapitre 1

**Exercice 1 :**

1) Soient $p$ et $q$ deux réels. Établir les formules :

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad ; \quad \cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2) En déduire des formules analogues pour $\sin p-\sin q$ et $\cos p-\cos q$

3) a) Déterminer l'ensemble $D$ des réels $x$ pour lesquels $\tan x$ et $\tan\frac{x}{2}$ sont définis.

   b) Soit $x\in D$ ; on pose $t=\tan\frac{x}{2}$. Établir les formules suivantes :

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

4) Utiliser les résultats précédents pour :

   a) Déterminer les valeurs de $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

   b) Factoriser $\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)$

   c) Résoudre l'équation : $\sqrt{3}\cos(5x)=\sin(2x)+\sin(12x)$

---

**Exercice 2 :**

1) $(ABC)$ est un triangle rectangle en $A$.

   a) Lequel des trois réels $\sin(\widehat{ACB})$, $\cos(\widehat{ACB})$ ou $\tan(\widehat{ACB})$, se calcule directement si on connaît $AC$ et $BC$ ? Donner la formule correspondante.

   b) Lequel des nombres $AB$, $BC$ ou $CA$ peut-on directement obtenir si on connaît $AC$ et $\sin(\widehat{ABC})$ ? Donner la formule correspondante.

2) $(DEF)$ est un triangle rectangle en $E$. De quel côté du triangle peut-on directement obtenir la longueur si on connaît $FD$ et $\cos(\widehat{EDF})$ ? Donner la formule correspondante.

3) $(IJK)$ est un triangle rectangle en $K$. De quel côté du triangle peut-on directement obtenir la longueur si on connaît $IK$ et $\tan(\widehat{IJK})$ ? Donner la formule correspondante.

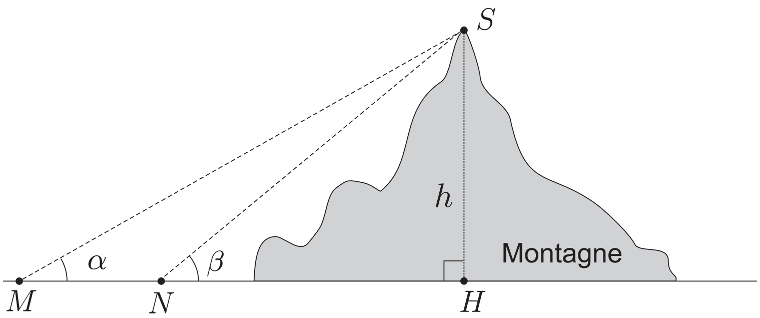
4) $(RST)$ est un triangle rectangle en $S$. Lequel des trois réels $\sin(\widehat{RTS})$, $\cos(\widehat{RTS})$ ou $\tan(\widehat{RTS})$, se calcule directement si on connaît $RS$ et $ST$ ? Donner la formule correspondante.

5) $(ABC)$ est un triangle rectangle en $C$. Lequel des trois réels $\sin(\widehat{BAC})$, $\cos(\widehat{BAC})$ ou $\tan(\widehat{BAC})$, se calcule directement si on connaît $AB$ et $AC$ ? Donner la formule correspondante.

---

**Exercice 3 :**

Ci-contre est représentée une montagne de sommet $S$. L'objectif est de déterminer une formule permettant d'obtenir la hauteur $h$ de cette montagne en fonction de la distance $MN$ et des angles $\alpha$ et $\beta$.




1) Utiliser le triangle rectangle $(MHS)$, pour exprimer $MH$ en fonction de $h$ et $\alpha$

2) De même, exprimer $NH$ en fonction de $h$ et $\beta$

3) En déduire la hauteur $h$ de la montagne en fonction de $MN$, $\alpha$ et $\beta$

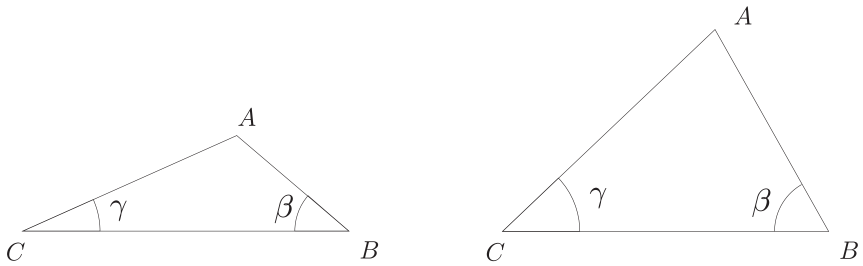
---

**Exercice 4 :**

On considère un triangle $(ABC)$ ayant pour angles : $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$. L'objectif de l'exercice est d'établir la formule suivante, appelée RÈGLE DES SINUS :

$$\frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\gamma}{AB}$$

Pour cela, on va envisager les deux seuls cas possibles pour un triangle : les 3 angles du triangle sont (strictement) aigus ou bien, 2 angles exactement sont (strictement) aigus et le 3$^{\text{eme}}$ est obtus. Quitte à changer de notations, on supposera que ce sont les angles $\alpha$ et $\beta$ du triangle qui sont aigus ($\gamma$ étant soit aigu, soit obtus).




1) On désigne par $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(BC)$. En considérant le triangle rectangle $(AHB)$ (resp : $(AHC)$), exprimer la longueur $AH$ en fonction de $AB$ et $\beta$ (resp : $AC$ et $\gamma$). En déduire la relation : $\dfrac{\sin\beta}{AC} = \dfrac{\sin\gamma}{AB}$

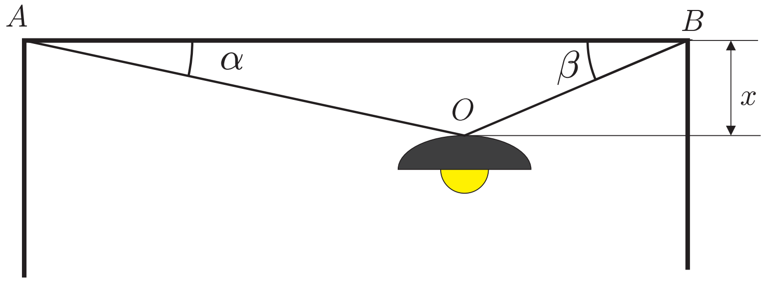
2) Grâce à raisonnement analogue (utilisant le projeté de $B$ sur la droite $(AC)$), justifier que : $\dfrac{\sin\alpha}{BC} = \dfrac{\sin\gamma}{AB}$
(On sera amené à envisager les deux cas suivants : $\alpha$ est strictement aigu, $\alpha$ est obtus).

3) Déduire la règle des sinus, des questions précédentes.

---

**Exercice 5 :**

Au dessus d'un passage piétonnier de largeur $AB$, un luminaire est fixé par deux câbles métalliques (Voir dessin ci-dessous). L'objectif est de calculer les longueurs $OA$, $OB$ et $x$ en fonction de la largeur $AB$ du passage, et des angles $\alpha$ et $\beta$, en utilisant des relations trigonométriques dans des triangles rectangles.




On désigne par $H$, le projeté orthogonal de $B$ sur la droite $(AO)$.

1) Exprimer $AH$ en fonction de la distance $AB$ et de l'angle $\alpha$.

2) a) Exprimer la distance $BH$ en fonction de la distance $AB$ et de l'angle $\alpha$.

   b) ▷ Donner l'expression de la distance $OH$ en fonction de $BH$ et de l'angle $\widehat{OBH}$

   ▷ Exprimer l'angle $\widehat{OBH}$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

   c) Déduire des questions précédentes l'expression de $OH$ en fonction de $AB$, $\alpha$ et $\beta$

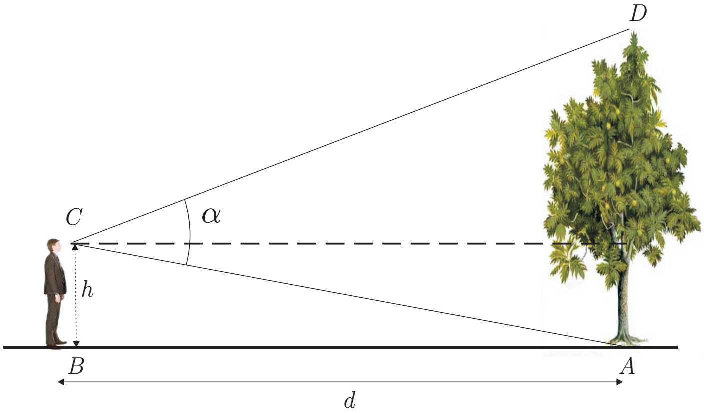
3) Déduire des questions précédentes l'expression de des longueurs $x$, $OA$ et $OB$ en fonction de $AB$, $\alpha$ et $\beta$

4) Grâce à la règle des sinus, appliquée dans le triangle $(OAB)$, retrouver l'expression de $OA$ et $OB$ en fonction de $AB$, $\alpha$ et $\beta$.

---

**<u>Exercice 6</u> :**

Un homme observe un arbre sous un angle $\alpha$. ses yeux sont à une hauteur $h$ du sol et il se tient à une distance $d$ de l'arbre.




L'objectif est de calculer la hauteur $AD$ de l'arbre en fonction de $\alpha$, $h$ et $d$. On désigne par $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AD)$.

1) Déterminer l'expression de la tangente de l'angle $\widehat{DCH}$ en fonction de $d$ et $DH$.

2) a) Exprimer la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ en fonction de $h$ et $d$.

   b) Que vaut l'angle $\widehat{DCH}$ en fonction de $\alpha$ et $\widehat{BAC}$ ? En déduire la tangente de l'angle $\widehat{DCH}$ en fonction $\alpha$, $h$ et $d$.

3) Déduire des questions précédentes $DH$, puis $AD$, en fonction de $\alpha$, $h$ et $d$.

---

**Exercice 7 :**

1) Écrire chacun des nombres suivants sous forme cartésienne :

$$(3-2i)+3\,(5+i)\ ;\quad (2-5i)(1+3i)\ ;\quad (2+3i)^2\ ;\quad (1+2i)^6\ ;\quad \frac{2-3i}{3+4i}\ ;\quad \frac{1-2i}{2+3i}+\frac{2-i}{3+i}\ ;$$
$$\frac{1}{(2-3i)(5-i)}\ ;\quad (1-i)^{21}\ ;\quad i^{2010}\ ;\quad i^n\ \ (n\in\mathbb{N})$$

2) Écrire chacun des nombres suivants sous forme cartésienne et sous forme exponentielle :

$$2\ ;\quad -3\ ;\quad 3\,i\ ;\quad -5\,i\ ;\quad \sqrt{3}-i\ ;\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,i\ ;\quad \frac{1}{1-i\sqrt{3}}\ ;\quad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\ ;\quad (1-i)^9(1+i\sqrt{3})^{-5}\ ;$$
$$\left(-\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)^{2008}\ ;\quad \frac{2-5\,i}{3i-7}\ ;\quad \tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+i\ ;\quad \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\ ;\quad \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+i\,\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\ ;$$
$$-\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right)\ ;\quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\ ;\quad \mathrm{e}^{i\theta}+1\quad (\theta\in\mathbb{R})\ ;\quad (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n\quad (\theta\in\mathbb{R})$$

---

**Exercice 8 :**

1) Montrer que tout nombre complexe $z$ et de module 1 vérifie $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

2) Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes de module 1 et tels que $z\,z'+1\neq 0$.

a) Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+z\,z'}$ est réel.

b) Montrer que $\left|\dfrac{z+z'}{1+z\,z'}\right|^2=\dfrac{1+\mathrm{Re}(z\,\overline{z'})}{1+\mathrm{Re}(z\,z')}$

c) Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+z\,z'}=1$ ssi $z=1$ ou $z'=1$.

---

**Exercice 9 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2=|z|\ ;\qquad z^2=\overline{z}\ ;\qquad |z|=\left|\frac{1}{z}\right|=\left|z+\frac{1}{z}\right|\ ;\qquad |z|=|z^2|=|1-z|$$

---

**Exercice 10 :**

Soient $M_1$ et $M_2$ des points du plan complexe d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$. Quelles conditions doivent respecter $M_1$ et $M_2$ pour que :

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ soit réel   b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur

---

**Exercice 11 :**

1) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que : $|z|=1$ si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

2) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. On pose $Z=\dfrac{z+2i}{z-2i}$. On note $A$ le point d'affixe $2i$, $B$ le point d'affixe $-2i$ et $M$ le point d'affixe $z$. Montrer que :

a) $Z$ est réel ssi $M$ est sur l'axe imaginaire.

b) $Z$ est imaginaire pur ssi $M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

c) $|Z| = 1$ ssi $M$ est sur l'axe réel.

d) $|Z| = 3$ ssi $M$ est sur $\mathscr{C}$ (où $\mathscr{C}$ est un cercle à déterminer)

---

**Exercice 12 :**

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

2) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$

b) Dans la formule obtenue à la question précédente, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ et on pose $x = \cos\theta$. En déduire une équation vérifiée par $x$, puis résoudre cette équation.

c) Déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

---

**Exercice 13 :**

Utiliser les formules d'Euler pour linéariser les polynômes trigonométriques suivants :

$$\sin^3 x \quad ; \quad \cos^5 x \quad ; \quad \cos x \sin^4 x \quad ; \quad \sin(5x)\cos(6x) \quad ; \quad \cos^4 x \sin^3 x \quad ; \quad \sin^3 x \cos(2x) - \sin(2x)\cos^3(3x)$$

---

**Exercice 14 :**

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, réduire les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

2) a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1+i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) En déduire la valeur de chacune des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} (-1)^p \binom{n}{2p}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2p+1 \leqslant n} (-1)^p \binom{n}{2p+1}$

---

**Exercice 15 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 = 7$

2) $z^2 = -7$

3) $z^2 = i$

4) $z^2 = 7 + 24i$

5) $z^2 = -5 - 11i$

6) $z^2 = 32 + 24\,i$

7) $z^2 + 3\,z + 5 = 0$

8) $z^2 + (1-4i)\,z + i - 5 = 0$

9) $-i\,z^2 + 2(1+i)\,z + 5(2+i) = 0$

10) $(1-i)\,z^2 + (3+6i)\,z - 7 + i = 0$

11) $z^4 - (5-14i)\,z^2 - 2\,(5i+12) = 0$

12) $z^3 + (1+i)\,z^2 + (8+7i)\,z + (18-4i) = 0$

*(Commencer par trouver une racine imaginaire)*

13) $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)\,z + 5 + 4\cos\theta = 0$

14) $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$ $(\theta \in \mathbb{R})$

---



T.S.V.P.

**Exercice 16 :**

1) Résoudre l'équation : $z^2 - (1+3i)\,z + 3i - 4 = 0$
2) On note $M_1$ et $M_2$ les images des racines de l'équation précédente dans le plan complexe. Montrer que le triangle $M_1OM_2$ est rectangle isocèle.
3) Déterminer l'affixe $z_3$ du point $M_3$ tel que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

---

**Exercice 17 :**

Soient les trois nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

1) Représenter dans le plan complexe les trois points $M_1$, $M_2$ $M_3$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3$, puis montrer qu'ils sont situés sur un même cercle de centre $O$.
2) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_3$. Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

***********************