MA401, 2010-2011, FEUILLE DE TD 1.

I. REVISIONS.

Exercice 1. Calcul de certaines sommes classiques. a) Démontrer que, si x n'est pas un multiple de 2π, on a, pour tout entier n:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

b) En déduire les sommes

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

c) Démontrer que, si x n'est pas un multiple de 2π, on a, pour tout n:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right| \le \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \le \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|}$$

Exercice 2. Un exemple d'application du critère d'Abel. Soit $(a_n)_{(n\geq 1)}$ une suite de nombres réels ou complexes, telle que la série $\sum a_n$, de terme général a_n, converge. Démontrer que les séries suivantes convergent:

$$\sum \frac{a_n}{1+\ln n} \qquad \sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

Attention. On ne suppose pas que la série $\sum |a_n|$ converge.

Exercice 3. Un exemple d'application du critère d'Abel. Démontrer que, si x n'est pas un multiple de 2π, les séries suivantes convergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+\ln n}$$

Exercice 4. Sommes de Césaro. Soit $(u_n)_{(n\geq 1)}$ une suite de nombres réels ou complexes, admettant une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$

Exercice 5. Comparaison série-intégrale. Constante d'Euler. a) On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Calculer

$$a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$$

b) En utilisant l'inégalité suivante:

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t \qquad \forall t \geq 0$$

Démontrer que

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1$$

c) On pose

$$X_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] - \ln n$$

Démontrer que la suite $(X_n)_{(n\geq 1)}$ est de Cauchy. En déduire qu'elle a une limite γ (*constante d'Euler*).

II. SUITES DE FONCTIONS. CONVERGENCE UNIFORME.

Exercice 6. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \text{Arctan}\big[n(x+1)\big] - \text{Arctan}\big[n(x-1)\big]$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{(n\geq 1)}$ tend, simplement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction f, qu'on déterminera.

Réponse.

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \\ \pi/2 & \text{si} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? sur $[1, \infty[$? sur $]1, \infty[$ pour $a > 1$?

On pourra utiliser l'inégalité suivante (et éventuellement l'admettre)

$$|\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x| \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

Exercice 7. On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^+$ par:

$f_n(x) = 0$ si $x \notin]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$, $f_n(1) = n$ et f_n est affine par morceaux.
$g_n(x) = 0$ si $x \notin]n-1, n+1[$, $g_n(n) = n$ et g_n est affine par morceaux.
$h_n(x) = 0$ si $x \notin]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$, $h_n(1) = \frac{1}{n}$ et h_n est affine par morceaux.
$k_n(x) = 0$ si $x \notin [0, n]$, $k_n(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in [0, n]$.

Etudier, pour chacune de ces suites, la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Calculer, pour tout n,

$$\int_0^2 f_n(x)\, dx, \quad \int_0^2 h_n(x)\, dx, \quad \int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx, \quad \int_0^{+\infty} k_n(x)\, dx$$

et les limites éventuelles de ces suites. Est-ce que la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite?

Exercice 8. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si la suite (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ et uniformément sur $[a, b[$, alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.

b) Si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, h]$ pour tout $h < b$, alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.

c) Si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, h]$ pour tout $h < b$ et si f_n est continue sur $[a, b[$ pour tout n, alors sa limite f est continue sur $[a, b[$.

Exercice 9. Etudier la convergence simple des suites de fonctions ci-dessous, là où elles sont définies, puis la convergence uniforme de ces mêmes suites sur les intervalles indiqués.

$f_n(x) = x^n$, $I = [0, \frac{1}{2}]$.
$f_n(x) = x^n(1-x)^\alpha$, $I = [0, 1]$.
$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$, $I = [a, 1]$ $(a > 0)$, ou bien $I =]0, 1]$.
$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $I = [0, a]$, $(a > 0)$, ou bien $I = [0, +\infty]$.
$f_n(x) = n^2xe^{-nx}$, $I = [0, 1]$, ou bien $I = [a, +\infty]$ $(a > 0)$.

Exercice 10. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(1) = f'(1) = 0$. Soit $f_n(x) = nx^nf(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

b) En utilisant une formule de Taylor, montrer que

$$\exists M > 0,\ \forall n,\ \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \le Mnx^n(1-x)^2.$$

c) En déduire que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\ge0}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\ge0}$ tend, uniformément sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, vers une fonction $f : [a, b[\to \mathbf{C}$. On va montrer qu'alors, la suite $(f_n)_{n\ge0}$ tend, uniformément sur tout le segment $[a, b)$, vers une limite g.

a) Vérifier que, pour tous entiers m et n, et pour tout x dans $[a, b[$, on a:

$$|f_m(b) - f_n(b)| \le |f_m(b) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(b)|$$

b) Montrer, en utilisant la question précédente, que la suite $(f_n(b)$ est de Cauchy. En déduire qu'elle a une limite ℓ.

c) Soit g la fonction définie sur tout le segment $[a, b]$ par:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [a, b[\\ \ell & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

Démontrer que la suite (f_n) tend vers g uniformément sur tout le segment $[a, b]$.

Exercice 12. Soit $(f_n)_{(n\ge0)}$ une suite de fonctions sur $[0, +\infty[$, telles que, pour tout n:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

On suppose que la suite $(f_n)_{(n\geq 0)}$ tens, uniformément sur $[0,\infty[$, vers une fonction $g : [0,\infty[\to \mathbf{C}$. Démontrer qu'alors:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

III. ROLE DES FONCTIONS EXP ET LOG. PRODUITS INFINIS.

Exercice 13. Soit $(f_n)_{(n\geq 0)}$ une suite de fonctions sur un intervalle I, chacune d'elles étant bornée sur I. On suppose que la suite $(f_n)_{(n\geq 0)}$ tend, uniformément sur I, vers une fonction f, bornée sur I.

a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{(n\geq 0)}$ est *uniformément bornée* sur I, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ (indépendante de n et de x), telle que:

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \forall x \in I \qquad \forall n \geq 0$$

b) Démontrer que, pour tous a et b dans $\mathbb{R}$,

$$|e^a - e^b| \leq |b-a| e^{\max(a,b)}$$

c) Sous les hypothèses du a), démontrer que la suite de fonctions $(e^{f_n})_{(n\geq 0)}$ tend, uniformément sur I, vers la fonction e^f.

Exercice 14. On considère les fonctions φ_n $(n \geq 1)$, φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi_n(x) = \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \qquad \varphi(x) = e^x \qquad \psi(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Démontrer que la suite $(\varphi_n)_{(n\geq 1)}$ tend, simplement sur $\mathbb{R}$, vers la fonction φ. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

b) Soit I un intervalle fermé borné de la forme $I = [-A, A]$, avec A entier > 0 quelconque. Montrer que la fonction $\psi_n = \ln \varphi_n$ est bien définie sur I si $n > A$.

c) Démontrer l'inégalité suivante:

$$|\ln(1+t) - t| \leq 2t^2 \qquad \forall t \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$$

En déduire, avec les notations du b), que la suite de fonctions $(\ln \varphi_n)_{(n>A)}$ tend, uniformément sur $I = [-A, A]$, vers la fonction ψ définie par $\psi(x) = x$.

d) En déduire que la convergence de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{(n\geq 1)}$ vers la fonction exponentielle φ est uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

e) On considère une fonction g_n sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$g_n(x) = \frac{1}{2x}\Big[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n - \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\Big] \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Comment faut-il choisir $g_n(0)$ pour que g_n soit continue sur $\mathbb{R}$? Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{(n\geq 1)}$ tend, simplement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction g qu'on déterminera.

Exercice 15. Produits infinis. On considère une suite $(u_n)_{(n\geq 1)}$ de réels >0, telle que la série $\sum u_n$, de terme général u_n, converge. On pose, pour tout $n \geq 1$:

$$U_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \qquad V_n = \ln U_n$$

a) Démontrer que la suite $(V_n)_{(n\geq 1)}$ est de Cauchy. On utilisera l'inégalité suivante, qu'on pourra aussi redémontrer:

$$0 \leq \ln(1+t) \leq t \qquad \forall t \geq 0$$

b) En déduire que la suite $(U_n)_{(n\geq 1)}$ a une limite U. On écrit habituellement, dans ce cas:

$$U = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$$

et ce type d'expression s'appelle *produit infini*.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite $f_n(x)$ définie par

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \qquad n \geq 1$$

a une limite $f(x)$ quand $n \to +\infty$. On écrira donc

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Le "produit infini" $f(x)$ sera calculé dans l'exercice suivant.

Exercice 16. Calcul d'un produit infini classique. Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité classique:

$$\frac{\mathrm{sh}x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

On utilisera les fonctions suivantes

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \qquad g_n(x) = \frac{1}{2x}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Montrer que la fonction g_n vérifie:

$$g_n(x) = \prod_{k=1}^{\psi(n)}\left(1+\frac{x^2}{n^2\tan^2\frac{k\pi}{n}}\right) \qquad \psi(n) = \begin{cases} p-1 & \text{si} \quad n=2p \\ p & \text{si} \quad n=2p+1 \end{cases}$$

(Ainsi, $\psi(n)$ est le plus grand entier strictement inférieur à $n/2$.) On pourra remarquer que les deux membres sont des polynômes, qu'ils ont même degré (lequel, discuter selon la parité de n), les mêmes racines complexes (lesquelles?), avec la même multiplicité (laquelle?), et qu'ils prennent la même valeur pour $x=0$ (laquelle?).

b) Démontrer l'inégalité suivante:

$$|\ln a - \ln b| \leq |a - b| \qquad \forall a > 1 \qquad \forall b > 1$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\ln g_n(x) - \ln f_{\psi(n)}(x)| \leq \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=1}^{\psi(n)} \left| \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}} - \frac{n^2}{k^2\pi^2} \right|$$

c) Démontrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left| \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} \right| \leq M \qquad \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

En déduire que:

$$|\ln g_n(x) - \ln f_{\psi(n)}(x)| \leq \frac{Mx^2}{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

d) On a montré, dans l'exercice 8, que $g_n(x) \to \frac{\mathrm{sh} x}{x}$ pour tout $x \neq 0$, et dans l'exercice 9, que la suite $f_n(x)$ a une limite $f(x)$. Déduire de la question c) que

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\mathrm{sh} x}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

III. AUTRES SUITES DE FONCTIONS CLASSIQUES.

Exercice 17. Polynômes de Bernstein. Soit f une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1 - x)^{n-k}$$

Le but de cet exercice est de prouver que la **suite** de fonctions B_n tend vers f uniformément sur $[0, 1]$. On pourra utiliser, et admettre, les deux égalités suivantes, dont la preuve relève plutôt des probabilités:

(1)
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} = 1$$

(2)
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1 - x)^{n-k} = \frac{x(1 - x)}{n}.$$

On utilisera aussi, dans les raisonnements, le nombre

$$M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

a) Démontrer, en utilisant (1), que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| x^k (1 - x)^{n-k}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait l'implication:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \alpha \implies \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire, en utilisant que la suite des polynômes de Bernstein B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

MA 401. Suite de la feuille de TD 1. (2010-2011).

Exercice 18. On considère une suite de fonctions (f_n) continues sur un segment $[a, b]$. On suppose

- que la suite (f_n) tend, simplement sur $[a, b]$, vers une fonction f.

- que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, h]$, avec $a < h < b$.

- qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|f_n(x)| \leq M$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [a, b]$.

Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Aide. On pourra remarquer que, pour tout $h \in]a, b[$:

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx \; - \; \int_a^b f(x)dx \right| \; \leq \; \int_a^h |f_n(x) - f(x)|dx \; + \int_h^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

Le théorème de convergence dominée n'est pas au programme.

Exercice 19. (Application de l'exercice 18). Déterminer les limites des intégrales suivantes, quand n tend vers $+\infty$:

$$A_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \; dx \qquad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \qquad C_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x^2)^n \; dx$$

On ne cherchera pas à calculer ces intégrales.

Exercice 20. On condidère les suites de fonctions f_n, g_n et h_n définies sur $[0, 1]$ par:

$$f_n(x) = ne^{-n^2x^2} \qquad g_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \qquad h_n(x) = n^2xe^{-nx}$$

a) Vérifier que ces suites tendent, simplement sur $]0, 1]$, vers 0, et que, pour h_n, c'est aussi vrai sur $[0, 1]$.

b) Peut-on en conclure que les intégrales suivantes tendent vers 0?

$$D_n = \int_0^1 ne^{-n^2x^2}dx \qquad E_n = \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} \; dx \qquad I_n = \int_0^1 n^2xe^{-nx} \; dx$$

On pourra calculer les limites de E_n et de I_n. Pour celle de D_n, on pourra admettre que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 21. Vrai ou faux? On considère une suite de fonctions f_n, continues sur un segment $[a, b]$, tendant, simplement sur $[a, b]$, vers une fonction f, supposée continue. On considère aussi une suite de points (x_n) dans $[a, b]$, tendant vers une limite x_0 dans $[a, b]$. Peut-on en conclure que

$$f_n(x_n) \to f(x_0)$$

Aide. On peut utiliser l'exemple suivant: $[a, b] = [0, 1]$, et $f_n(x) = nx^n(1-x)$ et $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 22. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$f_n(\lambda) = \int_0^n e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt$$

a) Montrer que, si $m > n$, on a, pour tout $\lambda \geq 0$:

$$|f_m(\lambda) - f_n(\lambda)| \leq \frac{4}{n}$$

Aide. On pourra remarquer, ou admettre, que

$$e^{-\lambda t} \sin t = v'(t) \qquad v(t) = -e^{-\lambda t} \frac{\cos t + \lambda \sin t}{1 + \lambda^2} \qquad |v(t)| \leq 2$$

b) En déduire que la suite (f_n), tend, uniformément sur $[0, \infty[$, vers une limite F.

c) Montrer que cette limite F est continue sur $[0, +\infty[$, et tend vers 0 à l'infini.

Exercice 23. Avec le cours de S3, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) de l'exercice 22 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$f_n'(\lambda) = \left[e^{-\lambda t} \frac{\cos t + \lambda \sin t}{1 + \lambda^2} \right]_0^n$$

a) Soit $a > 0$. Montrer que, pour tout $\lambda \geq a$:

$$\left| e^{-\lambda n} \frac{\cos n + \lambda \sin n}{1 + \lambda^2} \right| \leq 2e^{-an}$$

En déduire que la suite (f_n') tend, simplement sur $]0, \infty[$, vers une une fonction G qu'on calculera, et que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

b) En déduire que la fonction F de l'exercice 22 est dérivable sur $]0, \infty[$ et que

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{1 + \lambda^2}$$

c) En se rappelant que F tend vers 0 à l'infini, calculer F. Avec la notion d'intégrale impropre (semestre S3), calculer

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt \qquad (\lambda > 0) \qquad F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$