Année universitaire 2016-2017
Licence 1ère année - Mention MI
U.E.F. MA0102 - Éléments d'algèbre et de géométrie

Feuille de TD N°1

Exercice 1 :

Énoncer sans prononcer le nom des variables, les énoncés logiques suivants :

1) $\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathbb{C}$

2) $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 < 2ab$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4,\ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Exercice 2 :

Écrire avec quantificateur(s) les énoncés logiques suivants, puis écrire leur négation :

1) Tous les entiers naturels sont inférieurs ou égaux à leur carré.

2) Il existe un réel supérieur à son carré.

3) L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

4) Il existe un entier relatif plus petit que tout réel.

5) Le produit de deux entiers relatifs est toujours égal à leur somme.

6) Dans certains cas, le produit de deux entiers relatifs est égal à leur somme.

7) La somme de deux nombres rationnels est parfois un entier.

8) Tout réel est supérieur à un entier relatif.

Exercice 3 :

Analyser la signification des énoncés logiques suivants et de ceux obtenus en permutant l'ordre des quantificateurs :

a) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, xy = 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

a) Traduire à l'aide de quantificateurs l'énoncé : *La fonction f est partout nulle*

b) Traduire à l'aide de quantificateurs l'énoncé : *La fonction f s'annule en au moins un réel*

Exercice 5 :

En notant P et Q les énoncés suivants :

$P =$ " Jean est fort en maths " $Q =$ " Jean est fort en Chimie "

Traduire les énoncés qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q, et des connecteurs usuels :

1) " Jean est fort en Maths mais faible en Chimie "

2) " Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie "

3) " Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en Chimie et faible en Maths "

4) " Jean est fort en Chimie et en Maths ou il est fort en Chimie et faible en Maths "

Exercice 6 :

Quelles sont les valeurs de vérité des énoncés suivants ?

1) " π vaut 3,14159... implique que la somme des angles d'un triangle vaut π "

2) " π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut $\frac{\pi}{7}$ "

3) " π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 180^o "

4) " Si 2 est plus grand que 3 alors l'eau bout a 100^0 "

5) " Si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6 "

6) " Si 7 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7 "

Exercice 7 :

Soient P et Q deux énoncés logiques. Construire les tables de vérité des énoncés suivants, après les avoir éventuellement simplifiés en des énoncés synonymes :

1) non(P) et Q

2) non$(P) \Rightarrow (P$ ou $Q)$

3) non$\big(\neg P \wedge \neg Q\big)$

4) $(P$ et $Q) \Rightarrow \neg Q$

5) $(P \Rightarrow Q)$ ou $(Q \Rightarrow P)$

6) $\big(P \Rightarrow \text{non}(Q)\big) \vee \big(Q \Rightarrow \text{non}(P)\big)$

7) $\big(P \vee \neg Q\big) \wedge \big(\neg P \vee Q\big)$

Exercice 8 :

Écrire les énoncés synonymes aux négations des énoncés suivants (*On évitera d'employer l'expression : "il est faux que..."*) :

1) Si Paul ne va pas travailler ce matin, il va perdre son emploi.

2) S'il pleut demain ou s'il fait froid je ne sortirai pas.

3) Tout triangle rectangle possède un angle droit.

4) Le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7.

5) Il existe un quadrilatère qui n'est ni un rectangle, ni un losange.

6) $\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\; y > x$

7) $\exists a \in \mathbb{R},\, (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\, |a| \leqslant \varepsilon)$

8) $\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\, \big(|y-x| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon\big)$

Exercice 9 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \big(|x| > M \text{ et } |f(x)| \leqslant \varepsilon\big)$$

a) Nier cette propriété.

b) Simplifier cette négation en faisant apparaître "$\Longrightarrow$".

Exercice 10 :

1) Montrer que pour tous énoncés P, Q, R, on a :

$$(P \vee Q) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big(\urcorner(\urcorner P \wedge \urcorner Q)\Big) \qquad\qquad (P \wedge Q) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big(\urcorner(\urcorner P \vee \urcorner Q)\Big)$$

2) Montrer que pour tous énoncés P, Q, R, on a :

a) $\big(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)\big) \longmapsto\!\!\!\!\dashv (P \text{ et } Q)$

b) $(P \Rightarrow Q) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big(\text{non}(P) \text{ ou } (P \text{ et } Q)\Big)$

c) $\text{non}(P) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big(\text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } \big(\text{non}(P) \text{ et } Q\big)\Big)$

d) $\Big((P \text{ et } Q) \Rightarrow R\Big) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\Big)$

e) $\Big(P \Rightarrow (Q \text{ et } R)\Big) \longmapsto\!\!\!\!\dashv \Big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow R)\Big)$

Exercice 11 :

x et y désignant deux nombres réels, résoudre les équations et systèmes d'équations suivants. On exprimera explicitement chacun des ensembles de solutions à l'aide des ensembles de solutions de a) et b).

a) $(x-1)(y-2) = 0$

b) $(x-2)(y-3) = 0$

c) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$

d) $(x-1)(y-2)(x-2)(y-3) = 0$

e) $(x-1)^2(y-2)^2 + (x-2)^2(y-3)^2 = 0$

f) $\big((x-1)(y-2) = 0 \text{ ou } (x-2)(y-3) = 0\big)$

Exercice 12 :

Parmi les énoncés suivants, trouver ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux (justification à l'appui), puis écrire leur négation.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\},\ \dfrac{2x-5}{6x-15} = \dfrac{1}{3}$.

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x-5}{6x-15} = \dfrac{1}{3}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 3x + 2y - 6 = 0$.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 3x + 2y - 6 = 0$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big(x + y = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$.

f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(\big(\forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0\big) \Longrightarrow x = 0\Big)$.

Exercice 13 :

Soit l'énoncé logique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Big[\big(n \text{ premier et } n \neq 2\big) \Longrightarrow n \text{ impair}\Big]$$

Écrire la contraposée, la réciproque, la négation et la contraposée de la réciproque de cet énoncé

Exercice 14 :

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ ax + b\,\mathrm{e}^x = 0\Big) \Longleftrightarrow a = b = 0$

2) Montrer que : $\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x + \sqrt{x} - 2 = 0$

3) Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{5}{2}$

Exercice 15 :

1) Montrer que les énoncés suivants sont faux, après avoir écrit leur négation :

   a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[x^2 \geqslant 1 \Longrightarrow x \geqslant 1\big]$

   b) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2) Les énoncés logiques suivant sont-ils vrais ? Justifier

   a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x^2$

   b) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x^2$

Exercice 16 :

Montrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \Big[x \geqslant 2 \Longrightarrow \dfrac{3}{1-x} \geqslant -3\Big]$ *(Raisonnement direct)*

2) $\forall x \in]-\infty, 2[, \forall y \in]-\infty,\ \Big[x < y \Longrightarrow \dfrac{1-x}{x-2} < \dfrac{1-y}{y-2}\Big]$ *(Raisonnement direct)*

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(x^2 - 1 \in [0, 1] \Longleftrightarrow x \in [1, \sqrt{2}] \cup [-\sqrt{2}, -1]\Big)$ *(Raisonner par équivalence)*

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$ *(Raisonner par disjonction des cas)*

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \Big[(n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})\Big]$ *(Raisonner par contraposition)*

6) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \Big[x \neq y \Longrightarrow \dfrac{x}{x+1} \neq \dfrac{y}{y+1}\Big]$ *(Raisonner par contraposition)*

7) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ \Big[x+y=0 \Longrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)\Big]$ *(Raisonner par contraposition)*

8) $\forall a \in \mathbb{R},\ \Big[\big(\forall \varepsilon>0, |a|<2\varepsilon\big) \Longrightarrow a=0\Big]$ *(Raisonner par contraposition)*

Exercice 17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse :

$$\sqrt{3-4x}=-x \quad ; \quad \sqrt{x^2+3}=x+1 \quad ; \quad \sqrt{x+6}=6$$

Exercice 18 :

1) En raisonnant par l'absurde, montrer que :

   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geqslant 3 \text{ et } n \text{ premier}\big) \Longrightarrow (n \text{ impair})$

   b) $\forall x,y,z \in]0,+\infty[,\ \left(x+y+z<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \Longrightarrow \big(x<1 \text{ ou } y<1 \text{ ou } z<1\big)$

   c) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n \in [0,1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots\cdots \leqslant x_n \leqslant 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distincts et distants de moins de $\frac{1}{n}$. On raisonnera par l'absurde.

3) Montrer qu'il n'existe pas de plus petit nombre rationnel strictement positif. On raisonnera par l'absurde.

Exercice 19 :

Raisonner par récurrence pour montrer que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+0)\ldots(k+p) = \frac{n(n+1)\ldots(n+p+1)}{p+2}$

5) Pour tout entier $n \geqslant 1$: $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geqslant 1+nx$

6) Pour tout entier $n \geqslant 1$: $4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n}$

7) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $2^{2n}+15n-1$ est divisible par 9

8) La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés ($n \geqslant 3$) est donnée par : $180 \times (n-2)$ degrés

---

Exercice 20 :

1) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$, $u_1=6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=(n+1)\,3^n$

2) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$

3) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$. Deviner puis démontrer une formule exprimant u_n en fonction de n.

<u>Exercice 21</u> :

1) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.

2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et f l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+a}$$

Conjecturer, puis démontrer une formule donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

****