Module Ma0202 — Université de Reims Champagne-Ardenne
Licence Mathématiques — UFR Sciences
1ère année — Année 2016-2017

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

Travaux dirigés 1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Sur l'ensemble, $E = \mathbb{R}_+^*$, on définit deux lois $\perp$, $*$ par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y = xy \text{ et } \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \lambda * x = x^\lambda.$$

1. Vérifier que $\perp$ est une loi de composition interne sur E et que $*$ est une loi de composition externe sur E.
2. Montrer que $(E, \perp, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Préciser son élément neutre 0_E et l'opposé (le symétrique) d'un élément $x \in E$.

Exercice 2

On pose $E = \mathbb{R}^2$.

1. On munit E des lois $\square$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{cases} \forall ((a, b), (c, d)) \in E^2, (a, b)\square(c, d) = (a + c, b + d). \\ \forall (\lambda, (a, b)) \in \mathbb{R} \times E,\ \lambda \cdot (a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b). \end{cases}$$

   Est-ce que $(E, \square, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?
   (On donnera parmi les 8 propriétés définissant les espaces vectoriels, celles qui sont vérifiées et celles qui ne le sont pas).

2. On munit E des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{cases} \forall ((a, b), (c, d)) \in E^2, (a, b) + (c, d) = (b + d, a + c) \\ \forall (\lambda, (a, b)) \in \mathbb{R} \times E,\ \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b). \end{cases}$$

   Est-ce que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?
   (On donnera parmi les 8 propriétés définissant les espaces vectoriels, celles qui sont satisfaites et celles qui ne le sont pas).

Exercice 3

On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle $x+y$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$, définie par,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

et de la multiplication par un réel $\lambda \star x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, définie par,

$$\lambda \star (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (On donnera parmi les 8 propriétés définissant les espaces vectoriels, celles qui sont vérifiées et celles qui ne le sont pas).

Exercice 4

L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est noté E. Sur $E \times E$ on définit une loi interne $+$ par :

$$(x, y) + (z, t) = (xz, y + t), \quad (x, y) \in E \times E, \quad (z, t) \in E \times E$$

et une loi externe (à gauche) sur $\mathbb{R} \times E$ par

$$\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, y), \quad (x, y) \in E \times E, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. A-t-on la propriété de distributivité suivante ?

$$(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y).$$

2. Même question avec la loi externe $\cdot$ définie par:

$$\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y), \quad (x, y) \in E \times E, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On définit sur $E \times F$ les lois addition et multiplication externe (à gauche) respectivement par:

$$(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Montrer que $E \times F$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel (appelé espace vectoriel produit).

Exercice 6

Supposons que E soit un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et X un ensemble. Notons $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications de X dans E. On muni $\mathcal{F}(X, E)$ des lois addition et multiplication externe (à gauche) respectivement par:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in X, \quad f, g \in \mathcal{F}(X, E), \\ (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad f, g \in \mathcal{F}(X, E). \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{F}(X, E)$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

Exercice 7

Examiner si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (n à préciser).

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ ou } z = 0\}$$

$$F_3 = \{(a - 4b, a + b, 2a + 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$F_5 = \{(x + 1, y + 1, x - y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$F_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid xt = yz\}$$

$$F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$$

$$F_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$$

$$F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 1\}$$

$$F_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$$

$$F_{11} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$$

$$F_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

$$F_{13} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$$

Exercice 8

Soit:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}.$$

1. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'espace E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
2. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'espace E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$?.

Exercice 9

1. Le sous-ensemble suivant:

$$\{A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \mid \forall\, j = 1, \dots, q,\ a_{1,j} = 0\},$$

   est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$?

2. Le sous-ensemble suivant:

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, i = 1, \dots, n,\ \forall\, j = 1, \dots, n,\ a_{i,j} = -a_{j,i}\}$$

   est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 10

1. On considère les sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^3$ définis de la manière suivante :
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\right\}.$$
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$ et vérifier qu'il est un espace vectoriel ?

2. Mêmes questions avec
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\right\}.$$

3. Mêmes questions avec
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\right\}.$$

Exercice 11

Examiner si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
$$G_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 5\}$$
$$G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$$
$$G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2\}.$$

Exercice 12

On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel habituelles.

1. Rappeler quel est l'élément neutre de l'addition.

2. On définit E comme l'ensemble des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = 1$. Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Exercice 13

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose
$$F_a = \{y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, y' - ay = 0\}$$
avec $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On admettra ici que $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Exercice 14

Le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ suivant est-il un sous-espace vectoriel ?
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est paire}\}.$$

Exercice 15

Montrer que la partie de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ suivante est un sous-espace vectoriel :
$$G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$