TD10

Calcul matriciel

Opérations sur les matrices

Exercice 1

1. Soient trois matrices A, B et C à coefficients réels définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer $3A$ et $B - 2C$.

   (b) Calculer AB et AC. Que remarque-t-on?

   (c) Calculer A^2.

2. Soient les trois matrices A, B et $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

   Calculer AB, BA, AC et CA. Que peut-on remarquer?

Exercice 2

Soient A, B, C et D quatre matrices définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.
2. Vérifier par le calcul que $(AB)C = A(BC)$.
3. Calculer ${}^tC^tA$ et vérifier que ${}^t(AC) =^t C^tA$.

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 vérifiant: $AB = BA$.
2. Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordre 2 telles que: $M^2 - M - 2I_2 = 0$.
3. Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordre 3 telles que: $M^3 - 2M^2 - 5M + 6I_3 = 0$.

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

1. On suppose que l'on a $AB = -BA$. Montrer que l'on a $AB = -ABA$ puis $AB = BA$.
   En déduire les égalités $AB = BA = 0$.
2. Démontrer l'équivalence suivante: $(A + B)^2 = A + B \Leftrightarrow AB = BA = 0$.

Matrices carrées inversibles

Exercice 5

Déterminer l'inverse des matrices suivantes, quand cette matrice inverse existe:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-2&3\\2&1&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\1&1&-2\\2&-4&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\\-2&4&3\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\2&2&2&1\\4&3&4&-1\\1&-2&1&3\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit α un réel donné. On pose:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\\alpha&1-\alpha&2\alpha-2\\2&\alpha&-3\alpha-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&\alpha\\1&\alpha&3\end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α les matrices A, B et C sont-elles inversibles? Dans ce cas, calculer leurs inverses.

Exercice 7

Pour chacune des matrices suivantes, vérifier que l'on a bien l'égalité demandée et en déduire si elle est inversible. Donner alors son inverse.

(1) $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$, $A^2-9I_3=0$.

(2) $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}$, $B^2+B-2I_3=0$.

(3) $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $C^3-C^2-2C+4I_3=0$.

(4) $D=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $D^2-2D=0$.

(5) $E=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$, $E^2-2E-3I_4=0$.

(6) $F=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $F^2-3F=0$.

Exercice 8

On considère la matrice A définie par: $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer A^3-4A^2-6A. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3.
3. Résoudre le système linéaire (S) suivant:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&3y&+&2z&=&0\\x&+&2y&+&2z&=&-1\\x&+&3y&+&z&=&2\end{array}\right.$$

Exercice 9
Considérons la matrice A définie par: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système linéaire (S) suivant:

$$\begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ x + 4y + z = -2 \\ x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

Exercice 10
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, J^3, J^4. Que peut-on en déduire sur J^k pour $k \geq 4$?
2. Développer l'expression $(I + J)(I - J + J^2 - J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I + J)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 11
Pour tout réel a, on définit la matrice $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient a et b deux réels. Déterminer le réel c tel que $N(a)N(b) = N(c)$.
2. A quelle condition sur c a-t-on $N(c) = I_3$?
3. En déduire les conditions sur a pour que $N(a)$ soit inversible et expliciter le cas échéant $(N(a))^{-1}$.

Puissance d'une matrice carrée

Exercice 12
Calculer la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes, pour tout entier naturel n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13
Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit J la matrice définie par $J = M - I_3$.

1. Calculer J, J^2 et J^3. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, J^k.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI_3 + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n I_3 + na^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}B^2$.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n.

Exercice 15

On considère les trois matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = a^n P + b^n Q$.

Exercice 16

On considère les matrices à coefficients réels suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I + \beta J$, où α et β sont deux réels.
2. Déterminer J^n pour tout entier naturel n.
3. En déduire l'expression de A^n.

Exercice 17

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

1. Montrer que si P est inversible, alors $P = I$. Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.
2. Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.
3. Montrer que $PQ = QP = 0$.
4. Calculer $(I + P)^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $E(t) = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

1. Montrer que, pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t+t')$.
2. Calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et expliciter son inverse en fonction de I, A, A^2 et t.
3. Exprimer $E(2t)$, $E(3t)$, $E(4t)$, $E(5t)$ en fonction de $E(t)$. Quelle formule peut-on conjecturer? Démontrer cette formule.
4. En déduire l'expression de $(E(t))^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.

Exercice 19
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que:
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que (a_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n puis A^n en fonction de n.

Exercice 20
On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tel que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que:
$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3.$$
3. Vérifier que (a_n) est une suite géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 21
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaitre les suites (α_n) et (β_n).
4. En déduire u_n et v_n puis A^n en fonction de n.

Exercice 22
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut a_0, b_0, a_1 et b_1?
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
5. En déduire les expressions de a_n et b_n et enfin de A^n en fonction de n.

Exercice 23
On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ. Qu'est-ce qu'on peut en déduire?
2. Vérifier que $A = PDQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nQ$.
4. Expliciter A^n.

Exercice 24
On considère les matrices carrées de rang 3 suivantes: $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$.
   (a) Calculer D. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n.
   (b) Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire une formule donnant A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Applications aux suites

Exercice 25
Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier qu'on peut écrire $M = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^k pour $k \geq 3$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrences:
$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

(a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

(c) En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 26

On considère les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.
4. On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(b) En déduire une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 27

On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 3 \end{cases}$$

On introduit les matrices $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ et montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n.
4. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
5. En déduire les coefficients de A^n puis l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.