TD10

Calcul matriciel

Opérations sur les matrices

Exercice 1

1. Soient trois matrices A, B et C à coefficients réels définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer $3A$ et $B - 2C$.

   (b) Calculer AB et AC. Que remarque-t-on ?

   (c) Calculer A^2.

2. Soient les trois matrices A, B et $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

   Calculer AB, BA, AC et CA. Que peut-on remarquer ?

Exercice 2

Soient A, B, C et D quatre matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.
2. Vérifier par le calcul que $(AB)C = A(BC)$.
3. Calculer ${}^tC^tA$ et vérifier que ${}^t(AC) =^t C^tA$.

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 vérifiant : $AB = BA$.
2. Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordre 2 telles que : $M^2 - M - 2I_2 = 0$.
3. Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordre 3 telles que : $M^3 - 2M^2 - 5M + 6I_3 = 0$.

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

1. On suppose que l'on a $AB = -BA$. Montrer que l'on a $AB = -ABA$ puis $AB = BA$.
   En déduire les égalités $AB = BA = 0$.
2. Démontrer l'équivalence suivante : $(A + B)^2 = A + B \Leftrightarrow AB = BA = 0$.

Matrices carrées inversibles

Exercice 5

Déterminer la matrice inverse, lorsqu'elle existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Pour chacune des matrices suivantes, vérifier que l'on a bien l'égalité demandée et en déduire si elle est inversible. Donner alors son inverse.

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 - 9I_3 = 0$.

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B^2 + B - 2I_3 = 0$.

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 - C^2 - 2C + 4I_3 = 0$.

(4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D^2 - 2D = 0$.

(5) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E^2 - 2E - 3I_4 = 0$.

(6) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F^2 - 3F = 0$.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier que : $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$.
   (b) Donner une condition pour que A soit inversible.
   (c) Montrer dans ce cas que : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer dans ce cas leurs inverses en utilisant la formule précédente ou la méthode du pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $A^3 - 4A^2 - 6A$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3.

3. Résoudre le système linéaire (S) suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 9
Considérons la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système linéaire (S) suivant :

$$\begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ x + 4y + z = -2 \\ x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

Exercice 10
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, J^3, J^4. Que peut-on en déduire sur J^k pour $k \geq 4$?
2. Développer l'expression $(I + J)(I - J + J^2 - J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I + J)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 11
Pour tout réel a, on définit la matrice $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $N(a)N(b) = N(a + b)$.
2. A quelle condition sur c a-t-on $N(c) = I_3$?
3. En déduire que, pour tout réel a, $N(a)$ est inversible et expliciter $(N(a))^{-1}$.

Puissance d'une matrice carrée

Exercice 12
Calculer la puissance n-ième de chacune des matrices suivantes, pour tout entier naturel n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13
Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit J la matrice définie par $J = M - I_3$.

1. Calculer J, J^2 et J^3. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, J^k.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI_3 + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n I_3 + na^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}B^2$.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n.

Exercice 15

On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = a^n P + b^n Q$.

Exercice 16

On considère les matrices à coefficients réels suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I + \beta J$, où α et β sont deux réels.
2. Déterminer J^k pour tout entier naturel k.
3. En déduire l'expression de A^n.

Exercice 17

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

1. Montrer que si P est inversible, alors $P = I$. Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.
2. Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.
3. Montrer que $PQ = QP = 0$.
4. Calculer $(I + P)^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 18
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $E(x) = I_n + xA + \dfrac{x^2}{2}A^2$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x)E(y) = E(x + y)$.
2. (a) Calculer $E(x)E(-x)$.
   (b) En déduire que la matrice $E(x)$ est inversible et expliciter son inverse en fonction de I_n, A, A^2 et x.
3. (a) Exprimer $E(2x)$, $E(3x)$, $E(4x)$, $E(5x)$ en fonction de $E(x)$.
   (b) Quelle formule peut-on conjecturer ? Démontrer cette formule.
   (c) En déduire l'expression de $(E(x))^k$ en fonction de I_n, A, A^2, x et k.

Exercice 19
Pour tout nombre réel a, on considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $M(0)$ et $M(1/2)$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $M(a)$ en fonction des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et calculer J^2.
3. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'égalité : $M(a)M(b) = M(a + b - 2ab)$.
4. On suppose que $a \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $M(a)$ est inversible et qu'il existe un $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(b) = (M(a))^{-1}$. On exprimera b en fonction de a.
5. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
6. Déterminer l'unique nombre $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.
7. On considère désormais les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + \alpha Q$ et exprimer α en fonction de a.
   (b) Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n.
   (d) Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $a \neq \dfrac{1}{2}$, la formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 20
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que (a_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n puis A^n en fonction de n.

Exercice 21
On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tel que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que :
$$A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right) I_3.$$
3. Vérifier que (a_n) est une suite géométrique.
4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 22
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaitre les suites (α_n) et (β_n).
4. En déduire u_n et v_n puis A^n en fonction de n.

Exercice 23
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut a_0, b_0, a_1 et b_1 ?
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
5. En déduire les expressions de a_n et b_n et enfin de A^n en fonction de n.

Exercice 24
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ. Que peut-on en déduire ?
2. Vérifier que $A = PDQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nQ$.
4. Expliciter A^n.

Exercice 25
On considère les matrices carrées de rang 3 suivantes : $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$.
   (a) Calculer D. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n.
   (b) Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire une formule donnant A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 26
On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse.
   (b) Vérifier que $A = PTP^{-1}$.
2. (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   On donnera la valeur de α_0 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n2^{n-1}$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (b) En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

Applications aux suites

Exercice 27
Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier qu'on peut écrire $M = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
   (b) Calculer N^2, N^3 puis N^k pour $k \geq 3$.
   (c) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrences :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

(a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

(c) En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 28

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.
2. On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{cases}$$

   On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (b) En déduire une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 29

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

L'objectif de cet exercice est d'expliciter u_n en fonction de n. Pour cela, considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le produit PQ. Que peut-on en déduire ?
   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Déterminer D puis D^n.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de la matrice A^n.
2. (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.