TD 10

Intégration

Intégration sur un segment

Exercice 1 (★)

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx \qquad B = \int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx \qquad C = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} \qquad D = \int_0^5 \sqrt{3x+1} dx$$

$$E = \int_0^1 \frac{x^2}{5+x^3} dx \qquad F = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \qquad G = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx \qquad H = \int_{-1}^1 |x|\, dx$$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{(3+2x^3)^2} dx \qquad K = \int_0^4 |x-2| dx \qquad L = \int_{-1}^1 2^x dx$$

Exercice 2 (★)

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$A = \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx \qquad B = \int_1^e x(\ln(x))^2 dx \qquad C = \int_2^3 \ln(x) dx \qquad D = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

$$E = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \qquad F = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx \qquad G = \int_{-1}^1 x 2^x dx \qquad H = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

Exercice 3 (★)

Soit les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3} dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-2x^3}{(1+x^3)^2} dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}J$.
2. Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que : $\forall x \neq -1$, $\dfrac{x-1}{1+x^3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.
3. En déduire la valeur de I puis celle de J.

Exercice 4 (★)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$A = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \ (u = \sqrt{x}) \qquad B = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx \ (u = e^x) \qquad C = \int_0^{\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx \ (u = 1+e^x)$$

$$D = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx \ (u = e^{\sqrt{x}}) \qquad E = \int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \ (u = \sqrt{x}) \qquad F = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} \ (u = x^2+1)$$

Exercice 5 (★)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$ en utilisant chacune des trois méthodes suivantes :

1. en déterminant une primitive directement,
2. par intégration par parties,
3. avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 6 (★★)
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n \, dx$.

1. Calculer I_1.
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1, e]$, $\ln(x) \leq \dfrac{x}{e}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.
   (b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$.

1. (a) Calculer I_0.
   (b) Calculer $I_0 + I_1$ puis en déduire I_1.
2. (a) Montrer que : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+2}$.
   (b) En déduire que : $I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2(-1)^{n-1} I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.
4. (a) Montrer que : $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$.
   (b) Établir les inégalités : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$.
   (c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (★★)
Soit x un réel positif. On pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t dt$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{x^n}{n!} e^x$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 9 (★★)

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = I(q,p)$.
2. Montrer par intégration par parties que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
3. En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.
4. Déterminer $I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 10 (★★)

On considère la fonction $f(x) = x\ln(x)$ et, pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1)$.
2. En sommant les inégalités, montrer que : $\forall n \geq 2,\ S_n - n\ln(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_n$.
3. En déduire un encadrement de S_n.
4. Calculer $\int_1^n f(x)dx$.
5. Déterminer un équivalent de S_n.

Exercice 11 (★★)

On rappelle que la notation $\sqrt[n]{x}$ désigne la racine n-ième de x définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple,

$$\sqrt[3]{27} = 27^{1/3} = 3 \text{ car } 3^3 = 27 \text{ et } \sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2 \text{ car } 2^4 = 16.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$.

1. Montrer que : $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$: $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \ln(u_n) - \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx$.
5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 12 (★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 2^t dt \leq \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}$.
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Obtenir la limite de u_n.
4. Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

Exercice 13 (★★)

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J et soit f une fonction continue sur J.

   En utilisant une primitive F de f sur J, prouver que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, justifier qu'elle est dérivable sur celui-ci et calculer sa dérivée :

$$\varphi_1(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad \varphi_2(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \varphi_3(x) = \int_x^{2x} \ln(t)dt, \quad \varphi_4(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+e^t}$$

Exercice 14 (★★)
On considère la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathscr{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Vérifier ce résultat en calculant $\varphi(x)$ directement.

Exercice 15 (★★)
On considère la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de φ.
2. Justifier que φ est dérivable sur $\mathscr{D}$.
3. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi(1)$. En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.
4. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 16 (★★)
On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{dt}{t^4+1}$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que φ est impaire.

3. Étudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

4. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 17 (★★)

Pour tout $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Étudier la parité de φ.

3. Étudier le signe de φ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\varphi'(x)$.

5. En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Montrer que : $\forall x > 0,\ \varphi(x) \geq \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $\varphi(x)$.

Exercice 18 (★★)

On définit la fonction φ sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \ln(2) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $[0,1]$.

2. (a) Pour tout réel $x \in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

   (b) Établir que, pour tout réel $x \in]0,1[$, on a : $x^2 \ln(2) \leq \varphi(x) \leq x\ln(2)$.

   (c) En déduire que φ est continue sur $[0,1]$.

3. Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, puis déterminer ses variations.

Intégrales généralisées

Exercice 19 (★)

Vérifier si les intégrales généraliser suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

$$A = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \qquad B = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)} \qquad C = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \qquad D = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt \qquad F = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2} \qquad G = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \qquad H = \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

Exercice 20 (★)

Montrer que les intégrales généraliser suivantes sont convergentes et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt \qquad B = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \qquad C = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^3} dt \qquad D = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-1/t} dt$$

Exercice 21 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence :

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

On utilisera le changement de variable $u = \sqrt{t}$ pour A, $u = \sqrt{1+e^t}$ pour B, $u = \sqrt{t^2+1}$ pour C.

Exercice 22 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{2t^5+1}dt & B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt & C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} & D = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}-1}{t^2}dt \\
E = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt & F = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+\ln(t)}dt & G = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^3\ln(t)} & H = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \\
I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^2}{2^{t^2}}dt & J = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt & K = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-2}} & L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt
\end{array}$$

Exercice 23 (★)

On considère la fonction $f : [4, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{10}{t(t-2)(2t-5)}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que : $\forall t \in [4, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-2} + \dfrac{c}{2t-5}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 24 (★★)

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^2)^2} = 0$.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ est convergente.
3. Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall t \geq 1$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2}$.
4. En déduire la valeur l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice 25 (★)

1. Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^2}$ converge et déterminer sa valeur.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 26 (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{e^t}{(e^t+1)^2}$.

1. (a) Montrer la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$
   (b) Montrer que la fonction f est paire.
   (c) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3 f(t)$.
   (b) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.
   (c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

Exercice 27
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{2t}{e^t + e^{-t}}dt$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge.
3. Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2te^{-t}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.

Exercice 28 (★★)
Pour tout entier naturel n et pour tout réel $A \geq 0$, on pose :

$$I_n(A) = \int_0^A x^n e^{-x}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

1. (a) Calculer $I_0(A)$.
   (b) En déduite que J_0 est convergente et donner sa valeur.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.
2. (a) Déduire des questions précédentes que J_n est convergente (on pourra effectuer une récurrence).
   (b) Quelle relation lie J_{n+1} et J_n ?
   (c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n.
3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-2x}dx$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 29 (★★)

On considère un entier naturel n.

1. (a) Justifier que l'on a : $\dfrac{(\ln(t))^n}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   (b) En déduire la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3}dt$.

2. (a) Calculer I_0.

   (b) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

Exercice 30 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $g_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

Exercice 31 (★★★)

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on pose alors $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

   (a) Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

   (b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 32 (★★★)

On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Justifier l'existence de $g(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}dt$.

4. Pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 1$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$ puis établir que $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{\ln(2)}{x}$.

5. En déduire que, pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln(2)}{x}$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

6. Montrer que : $\forall x > 0,\ 0 \leq \dfrac{\ln(2)}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x+1}$.

7. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.
