TD12

Calcul différentiel

Dérivabilité

Exercice 1

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

$f_1(x) = x\sqrt{x}$ et $x_0 = 0$

$f_2(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$ et $x_0 = 1$

$f_3(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $x_0 = -1$

$f_4(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ et $x_0 = 0$

$$f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } x_0 = 0$$

$$f_6(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et } x_0 = 0$$

Exercice 2

1. A l'aide des taux d'accroissements de exp en 0 et ln en 1, montrer que :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

2. Avec le changement de variables $h = x - 1$, déduire de la limite 1.(b) que : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$

3. Déduire des deux questions précédentes les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\ln(x)}$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - \ln(x) > 0$.
2. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f puis justifier que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
4. Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 1 et déterminer l'équation de la demi-tangente à droite en 1 à la courbe représentative de f.
3. Même question à gauche en 1.

Exercice 6

1. Justifier que la fonction $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Est-elle dérivable en 1 ? en 0 ? Expliciter f'.
2. Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$g(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} x^3\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Sont-elles dérivables en 0 ? Si oui, calculer la dérivée correspondante.

Exercice 7

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur fonction dérivée :

$$f_1(x) = e^{3x^2-1} \qquad f_2(x) = x\ln(x) - x \qquad f_3(x) = 3^x$$
$$f_4(x) = x^x \qquad f_5(x) = \ln(\ln(x)) \qquad f_6(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$$
$$f_7(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{2}} \qquad f_8(x) = \frac{2e^x}{3x - 1} \qquad f_9(x) = \frac{3}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = e^{2x+1} \qquad h(x) = \ln(1 + x).$$

Exercice 9

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{(3x + 1)(2 - x)}.$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{1 - x} + \dfrac{b}{1 + x}$. En déduire la dérivée n-ième de f.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $g(x) = \dfrac{a}{3x + 1} + \dfrac{b}{2 - x}$. En déduire la dérivée n-ième de g.

Exercice 10

On considère la fonction $f(x) = xe^{2x}$.

1. Donner les valeurs des six réels $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (a_0x + b_0)e^{2x}, \qquad f'(x) = (a_1x + b_1)e^{2x}, \qquad f''(x) = (a_2x + b_2)e^{2x}.$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}.$$

On précisera les relations entre a_{n+1}, b_{n+1} et a_n, b_n.

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$, est arithmétique.

5. Donner les expressions de c_n puis de b_n en fonction de n.

6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x)e^{2x-1}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{2x-1}.$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

   Calculer B^2, B^3 puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2$.

3. A l'aide des questions précédentes, déterminer $f^{(n)}$.

Étude de fonctions

Exercice 12

1. Déterminer l'ensemble D des réels x tel que $e^x - e^{-x} > 0$.

2. On définit la fonction f sur D par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) Étudier le sens de variation de f et donner les limites de f aux bornes de D.

   (b) Montrer l'existence d'un unique réel a vérifiant $f(a) = 0$, et donner la valeur exacte de a.

   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a vaut $\sqrt{5}$.

Exercice 13

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites aux bornes de son ensemble de définition et tracer enfin sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. Montrer que, quel que soit le réel x, on a : $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

3. (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner une expression de $(f^{-1})'(x)$.

Exercice 14

On note f la fonction définie par : $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

1. (a) Montrer que f est continue en 0 et continue à gauche en 1.

   (b) Est-elle continue à droite en 1 ?

2. (a) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\ln(x)}$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\exp\left(1/\ln(x)\right)-1}{1/\ln(x)}$.

   Pour cette dernière limite, on pourra poser $X = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3. (a) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)}\exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

   (b) En déduire que f est dérivable à gauche en 1, et donner $f'_g(1)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.
   On précisera la valeur de f en e^1 et sa limite en $+\infty$.

5. Tracer la courbe représentative de f.

Fonctions convexes

Exercice 15

Prouver à l'aide d'arguments de convexité les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 1,\ \ln(x) \leq x-1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$.
3. $\forall x \in [1,e],\ \ln(x) \geq \dfrac{x-1}{e-1}$.

Exercice 16

1. Montrer que la fonction $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in]1,+\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 17

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition respectif (on étudiera également les éventuels points d'inflexions) puis tracer leurs courbes représentatives :

$$f(x) = x^3+3x^2-9x+5, \quad g(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad h(x) = e^{-x^2}, \quad i(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Exercice 18

Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$.
2. Déterminer les variations de f sur $]0,1[$.
3. Étudier la convexité de f sur $]0,1[$.
4. Montrer que f possède un unique point d'inflexion et déterminer la tangente de f en ce point.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 19

On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f par $f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée. On appellera toujours f la fonction prolongée, définie sur $[0,+\infty[$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

   Quelle est l'allure de la courbe représentative de f au point d'abscisse $x=0$?
4. Dresser le tableau de variation de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.
5. Étudier la convexité de f (on étudiera également les éventuels points d'inflexions).
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

Exercice 20

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0>0$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}}$.

1. (a) On pose $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.

   Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

   (b) Tracer sur le même graphique la droite $y=x$.

   (c) Tracer toujours sur le même graphique les premiers termes de la suite lorsque $u_0=\dfrac{1}{2}$, lorsque $u_0=1$ et lorsque $u_0=4$.
2. Que se passe-t-il si $u_0=1$? Retrouver ce résultat par le calcul.
3. On suppose que $0<u_0<1$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n\in]0,1[$.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Que peut-on conclure ?
4. On suppose que $u_0>1$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n>1$.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Que peut-on conclure ?

Exercice 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>1$ et par la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=1+\ln(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n>1$.
2. Étudier les variations de la fonction $f(x)=\ln(x)-x+1$ sur $]1,+\infty[$ puis en déduire son signe.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 22

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ln(3)$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 23

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16}$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$ et le signe de $f(x) - x$.
   (b) Quelles sont les limites finies possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
3. On suppose que $u_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4. On suppose que $u_0 = \frac{3}{4}$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{3}{4}$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 24

On considère la fonction $h(x) = e^{-x} + 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n).$$

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$ notée α.
2. Étudier les variations de h et montrer que $h([1, 2]) \subset [1, 2]$ (on pourra utiliser que $h(1) \simeq 1,4$ et $h(2) \simeq 1,1$).
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
4. Montrer que, pour tout réel $x \in [1, 2]$, $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

6. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$.

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 25

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 + \frac{\ln(u_n)}{4}$.

1. Soit $f(x) = 4 + \frac{\ln(x)}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $[1, e^2]$ est stable par f.
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $[1, e^2]$ noté α.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
4. (a) Montrer que, pour tout $x, y \in [1, e^2]$, $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y - x|$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. (a) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geq N,\ |u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.
   (b) En déduire un programme en langage Scilab permettant d'obtenir une approximation de α à 10^{-6} près.

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 1}$. On pose $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que : $\forall x \geq \frac{1}{3},\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que les points fixes de f.
   (c) Montrer que $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ sont des intervalles stables par f.
2. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $0 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq \frac{1}{3}$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \frac{1}{3}\right|$.

(e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$.

(f) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 27

On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f et de f' sur $[0, 1]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$ notée α.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 28

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
3. Déterminer f' et dresser le tableau de variation de f. Préciser les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Déterminer les points d'inflexions de f et les équations des tangentes en chacun des points d'inflexions.
5. Tracer la courbe représentative de f. Donnée numérique: $e^{-1/2} \simeq 0.61$.

Partie 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, admet une seule solution, notée λ.
7. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
8. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
9. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (b) Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \lambda| \leq 10^{-9}$.