TD 12

Applications linéaires

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 1 (★)

Justifier que les applications suivantes ne sont pas linéaires :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, x-y) \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x|+y \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P^2 \end{array} \right.$$

Exercice 2 (★★)

Soit f l'application définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x-y, 3x+y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $Ker(f)$. f est-elle injective ?
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3 (★)

1. (a) Vérifier que la famille $((1,1),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Décomposer (x,y) dans cette base.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,1) = (1,0,3)$ et $f(0,1) = (-2,-1,1)$.
   (a) Calculer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer la dimension du noyau de f. f est-elle injective ?
   (c) Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
   (d) Le vecteur $(1,1,1)$ admet-il un antécédent par f ?

Exercice 4 (★)

Soit l'application f définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M - {}^tM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer f^2.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Justifier de deux manières que f n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM - MD.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

3. Montrer que $f^3 = f$.
4. Justifier de deux manières que f n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.

Exercice 6 (★)

Soit l'application f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 7 (★★)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On considère l'application $\phi : E \to E$ définie par : $\phi(f) = f'$.
   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
   (b) ϕ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On considère l'application $\psi : E \to E$ définie par : $\psi(f) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que $\phi \circ \psi = Id_E$.
3. En déduire que E n'est pas de dimension finie.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 8 (★)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer $Ker(f)$. En déduire le rang de f.
   (b) Déterminer une base de $Im(f)$.
3. Justifier que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
   (b) En déduire la dimension de l'image de f.
   (c) Déterminer une base de l'image de f.

Exercice 10 (★★)

1. Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$, où $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner une base de F.

2. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$, où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à la i-ième ligne et j-ième colonne.
   (a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $Im(\varphi)$. En déduire que $Ker(\varphi)$ est de dimension 2.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $Ker(\varphi)$. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y, z et en déduire une base de $Ker(\varphi)$.

Exercice 11 (★★)

On considère l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{array} \right.$$

1. Calculer l'image par f de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que f est un isomorphisme.
4. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 12 (★★)

Soit f l'application linéaire qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(2x+1) - 2xP'(1-x).$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f (on en donnera une base et la dimension).
3. Déterminer l'image de f (on en donnera une base et la dimension).
4. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Applications linaires et matrices

Exercice 13 (★)

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(\vec{i}) = \vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{i}$ et $f(\vec{k}) = \vec{j}$.

1. Déterminer les matrices de f et de $g = f - f^2$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. (a) Déterminer f^3. Donner un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.
3. Déterminer le noyau et l'image de g.

Exercice 14 (★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(x,y,z) = (x - 2y - \frac{4}{3}z, -2x + 4y + \frac{8}{3}z, 3x - 6y - 4z)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. (a) On note $e'_1 = (2,1,0)$, $e'_2 = (4,0,3)$ et $e'_3 = (1,-2,3)$.
   Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Utiliser A' pour :
   (a) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
   (b) Déterminer si $f - Id$ est un isomorphisme. Que vaut $Ker(f - Id)$? $Im(f - Id)$?
   (c) Déterminer $f \circ f$.

Exercice 15 (★★)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = AMA$.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1}.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de f. On en donnera une base et sa dimension.
   (c) Déterminer l'image de f. On en donnera une base et sa dimension.

Exercice 16 (★)

Soit f l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + (a+d)I_2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 17 (★★)

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que les vecteurs $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont linéairement indépendants.

   (b) Vérifier que : $f(e_1) = f(e_3) + f(e_4)$.
   (c) En déduire une base de $Im(f)$.

2. Donner une base de $Ker(f)$.

3. Calculer A^2 et vérifier que : $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Exercice 18 (★)

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par : $f(P) = P(X+1)$ et $g(P) = P'$.
   (a) Déterminer les matrices de f et g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Les endomorphismes f et g sont-ils des automorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. Soient ϕ et ψ deux endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par : $\phi(P) = P(X+2)$ et $\psi(P) = P'(X+1)$.
   (a) Exprimer ϕ et ψ à l'aide de f et g.
   (b) En déduire les matrices de ϕ et ψ.

Exercice 19 (★★)

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathscr{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale Q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. (a) Vérifier que $Im(f) = Vect(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $Im(f)$.
   (b) Déterminer $Ker(f)$.

Exercice 20 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.

2. Montrer que φ est un isomorphisme.

3. En déduire que pour tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q(a_i) = b_i$.

4. (a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la matrice suivante (appelée matrice de Vandermonde)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

   est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 21 (★★)

On note $E = Vect(f_1, f_2)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$. Soit Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Delta : f \mapsto f'.$$

1. Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
2. Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
3. L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme ?
4. Expliciter A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. En déduire les expressions de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Formule de changement de bases

Exercice 22 (★★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose : $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1)$.

1. Calculer $f(u)$.
2. Montrer que $Ker(f - Id) = Vect(v, w)$.
3. Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$
5. En déduire la matrice de f^n dans la base $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 (★★)

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. On note $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{k}$. Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E. Écrire $P = P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$.
3. Écrire la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Rappeler l'expression reliant A, D, P et P^{-1}. Calculer A^n.
5. Justifier que f est un automorphisme de E et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 24 (★★)

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. (a) Déterminer une base de $Im(f_a)$.
   (b) Montrer qu'une base de $Ker(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.
2. Écrire la matrice A de f_a dans $\mathscr{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$.
3. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.
   (c) Écrire la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Donner la formule reliant A, A' et P.

Exercice 25 (★★)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $f(M) = AM - MA$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Donner la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier que f n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer le noyau de f.
3. (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice $M_{\mathscr{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ puis donner exprimer $M_{\mathscr{B}'}(f)$ à l'aide de $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et de $M_{\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 26 (★★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propre de la matrice A. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$ et vérifiant :

$$f(e_1) = -2e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

3. En déduire une matrice triangulaire semblable à A.

Exercice 27 (★★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que $(A - I_3)^2 = 0$.
   (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. (a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Justifier qu'il existe P (que l'on explicitera) telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 28 (★★★)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

1. (a) Reconnaître pour tout entier naturel n, le produit MX_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans $\mathscr{B}'$ vérifie

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
5. (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.
