TD 14

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 (★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): \ 2y' - 4y = 1.$$

1. Déterminer l'unique trajectoire d'équilibre associée à (E).
2. Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Justifier qu'il existe une unique solution à (E) vérifiant $y(0) = 0$ et la donner.

Exercice 2 (★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$(E): \ y' - y = \ln(t) - \frac{1}{t}.$$

1. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière évidente de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 (★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): \ y' + 2y = te^{3t}.$$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée.
2. Soit P une fonction polynômiale de degré 1.
   (a) Justifier que la fonction $y_0 : t \mapsto P(t)e^{3t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $y_0'(t)$ pour tout réel t.
   (b) A l'aide d'une identification, déterminer P pour faire de y_0 une solution de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): \ 2y' - y = 2t - e^{-t}.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. (a) Déterminer un réel α tel que la fonction $y_1 : t \mapsto \alpha e^{-t}$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_1): \ 2y' - y = e^{-t}$.

(b) Déterminer des réels α et β tels que la fonction $y_2 : t \mapsto \alpha t + \beta$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_2) : \ 2y' - y = t$.

3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Exercice 5 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : \ y' + y = \frac{1}{(1+e^t)^2}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. On va à présent chercher une solution particulière f de (E) sous la forme $f(t) = g(t)e^{-t}$.
   (a) Montrer que f est solution particulière de (E) si et seulement si $g'(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.
   (b) En déduire une fonction f solution particulière de (E).
3. Donner toutes les solutions de (E).

Exercice 6 (★★)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 1$ et vérifiant pour tous x et y réels :
$$f(x+y) = f(x)f(y). \qquad (1)$$
   (a) Montrer qu'il existe une constante α telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - \alpha f(x) = 0$.
   (b) En déduire l'expression de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $g(1) = 0$ et vérifiant pour tous x et y réels strictement positifs :
$$g(xy) = g(x) + g(y). \qquad (2)$$
   (a) Montrer qu'il existe une constante β telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{\beta}{x}$.
   (b) En déduire une expression de g.
3. Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. On appelle fonction exponentielle en base a la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = \exp(x \ln(a)).$$
   Soit $b > 0$ et $b \neq 1$. On appelle fonction logarithme en base b la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$
   (a) Montrer que $\exp_a$ vérifie la relation (1) et que $\log_b$ vérifie la relation (2).
   (b) Montrer que $\exp_a$ et $\log_a$ sont bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 7 (★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : \ y'' - 4y' + 3y = 3t^2 + t - 1.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).
4. Justifier qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$ et la donner.

Exercice 8 (★)

Déterminer les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E):\ y'' - y' = 0$$

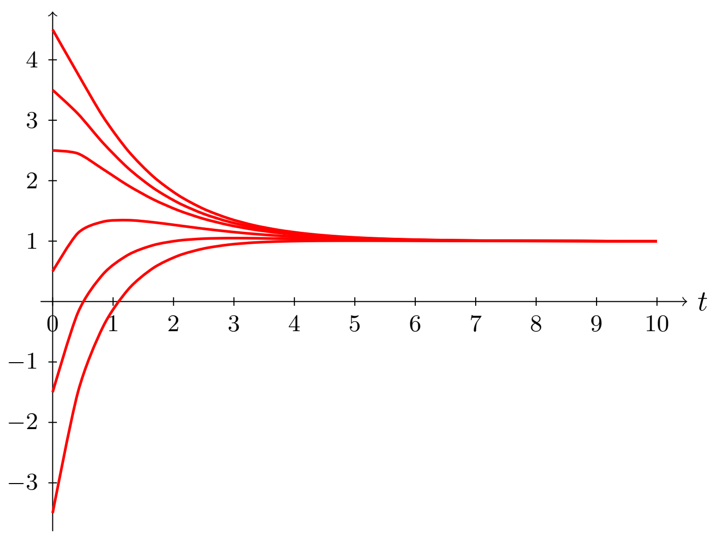
1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaire d'ordre 2.
2. En faisant le changement de variable $z = y'$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 9 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E):\ y'' + 2y' + y = 1 - 2e^{-3t}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction $h(t) = ae^{-3t}$ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = e^{-3t}$.
   (b) Montrer que l'équation $y'' + 2y' + y = 1$ possède une unique trajectoire d'équilibre.
   (c) Donner l'ensemble de toutes les solutions de l'équation (E).
3. Étudier la limite quand t tend vers $+\infty$ de $y(t)$ pour toute solution y de (E).
4. Expliquer en quoi la figure suivante qui représente certaines trajectoires de (E) est cohérente avec les résultats obtenus précédemment.



Exercice 10 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): \ y'' + 3y' + 2y = te^{-t}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. On pose $z(t) = y(t)e^t$ où y est une solution de (E).
   (a) Calculer z' et z'' puis vérifier que $z'' + z' = t$.
   (b) Déterminer une expression de z sous la forme d'un polynôme du second degré.
   (c) En déduire une solution particulière de (E).
3. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 11 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): \ (1+e^t)y'' + 2e^t y' - y = e^t.$$

1. On pose $z(t) = (1+e^t)y(t)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z'' - z = e^t$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $z'' - z = 0$.
   (b) Déterminer un réel α tel que la fonction $t \mapsto \alpha t e^t$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z'' - z = e^t$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 12 (★★)

On considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$ suivante :

$$(E): \ t^2 y'' + 3ty' + y = 0.$$

1. On pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z'' + 2z' + z = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle $z'' + 2z' + z = 0$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 13 (★★★)

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, avec $a_n \neq 0$. On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et F l'ensemble des fonctions de E solutions de l'équation différentielle suivante :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

1. (a) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit φ l'application définie par
   $$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} F & \to & \mathbb{R}^n \\ f & \mapsto & (f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)). \end{array} \right.$$
   Montrer que φ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^n$.
   (c) En déduire la dimension de F.
2. (a) Donner une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

   (b) Donner une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ lorsque $a^2 - 4b \geq 0$.

3. On suppose dans cette question que $n = 3$ et on considère l'équation différentielle suivante :

$$2y''' - 5y'' + y' + 2y = 0.$$

   (a) Montrer que la fonction polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ admet trois racines $\alpha < \beta < \gamma$ que l'on déterminera.

   (b) Montrer que $\left(t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t}, t \mapsto e^{\gamma t}\right)$ est une famille libre de l'ensemble des solutions F.

   (c) En déduire une base de F.

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 14 (★★)

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S).
2. Trouver les états d'équilibre associés à (S).
3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergente.

Exercice 15 (★★)

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{array} \right.$$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
3. Résoudre le système (S).
4. Trouver une trajectoire qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Exercice 16 (★★)

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : \; y'' + 5y' + 4y = 0.$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.
2. Résoudre l'équation (E) à l'aide d'un système différentiel linéaire.

Exercice 17 (★★)

On considère l'équation différentielle d'ordre 3 sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$(E) :\; y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(E) \;\Leftrightarrow\; X' = AX$.
2. Montrer que -2, -1 et 1 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $X' = AX$, puis de (E).

Exercice 18 (★★)

On considère le système différentiel (S) suivant sur $\mathbb{R}$:

$$(S) :\; \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

1. Expliciter une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Calculer $A^3 - 3A^2$. En déduire le spectre de A.
3. Diagonaliser A.
4. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

Exercice 19 (★★)

On considère le système différentiel (S) suivant sur $\mathbb{R}$:

$$(S) :\; \begin{cases} x' = x + 4y - 4z \\ y' = 3x + 2y - 4z \\ z' = 3x - 3y + z \end{cases}$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (S) vérifiant : $X(0) = X_0$.
2. Résoudre le système (S).
3. (a) Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée à la question 1.
   (b) Cette trajectoire est-elle convergente ?

Exercice 20 (★★)

On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{array} \right.$$

1. (a) Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre que l'on déterminera.
   (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.
3. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.
   (a) En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que $Y' = P^{-1}X'$.
   (b) En déduire que : $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.
4. (a) Montrer que $t \mapsto te^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $u' - 2u = e^{2t}$.
   (b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$, puis celles du système (S).

Exercice 21 (★★)

On considère le système différentiel linéaire sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{array} \right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que X solution de (S) si et seulement si $X' = AX$.
2. On introduit la matrice inversible P dont on admet que l'inverse est donnée par la matrice P^{-1} ci-après :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.
3. (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $\varphi' = \varphi$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $\varphi' = -\varphi$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_3) : $\varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

4. (a) On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

   Montrer que α est solution de (E_1), γ est solution de (E_2) et β est solution de (E_3) pour un réel c bien choisi.

   (b) En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

5. (a) Déterminer les états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

   (b) Donner une solution de (S) non stationnaire qui converge vers l'unique état d'équilibre du système.

Exercice 22 (★★)

On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'' = 3x + y \\ y'' = 2x + 2y \end{cases}$$

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On notera P et D les matrices telles que $A = PDP^{-1}$.

2. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que : $X'' = AX \Leftrightarrow Y'' = DY$.

3. Résoudre les équations différentielles (E_1) : $y'' = y$ et (E_2) : $y'' = 4y$.

4. En déduire l'ensemble des solutions du système $Y'' = DY$ puis celles du système (S).

Exercice 23 (★★★)

On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 3x - y + 2e^t \end{cases}$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

   (b) Diagonaliser A.

   (c) En déduire que les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont les combinaisons linéaires des fonctions vectorielles $X_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 3e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

2. On pose $X(t) = f(t)X_1(t) + g(t)X_2(t)$, avec f et g deux fonctions dérivables.

   (a) Montrer que : $X'(t) = AX(t) + B(t) \Leftrightarrow f'(t)X_1(t) + g'(t)X_2(t) = B(t)$.

   (b) En déduire une expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Donner une solution particulière du système (S).

3. Donner l'ensemble des solutions du système (S).
