TD 15

Convergence et approximation

Exercice 1 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}$.
2. En déduire que : $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite de fonction de répartition Φ.

1. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que : $\forall x > 0,\ P(|X| < x) \geq 1 - \frac{1}{x^2}$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$, $P(|X| < x) = 2\Phi(x) - 1$.
3. En déduire l'inégalité : $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$.

Exercice 3 (★★)

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces, les lancers étant indépendants.

Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $\frac{n}{3}$, soit supérieur à 0.9 ?

Exercice 4 (★★)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit :

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Y_n = n(1 - M_n).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.
2. Déterminer la fonction de répartition de M_n puis celle de Y_n.
3. En distinguant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable remarquable.

Exercice 5 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}dx$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, I_n converge.
Que vaut I_0 ?

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, I_n vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

2. On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

   (a) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

   (b) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.

   (c) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \cdot \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

   (d) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (qu'on ne cherchera pas à calculer).

3. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Exercice 6 (★★)

On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes, de même densité f.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \; P(U_n \leq t) = \left(1 + \dfrac{e^{-t}}{n}\right)^{-n}$.

3. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 7 (★★)

1. Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

   Déterminer la fonction de répartition de $W = -\ln(V)$. On dit que W suit une loi de Gumbel.

2. Dans la suite, on désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{E}(1)$.

   On considère la variable aléatoire $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(b) Justifier que Y_n est une variable aléatoire à densité.

3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$ et on note F_{Z_n} sa fonction de répartition.

   (a) Justifier que, pour tout réel x, $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

   (c) Montrer que, pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

   (d) En déduire que (Z_n) converge en loi vers W.

Exercice 8 (★★)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n.

2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x)$ pour tout $x < 0$ puis pour tout $x > 1$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(X_n \leq k)$.

   (b) Montrer que, pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. .

4. En déduire que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Exercice 9 (★)

On considère un entier $n \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant pile avec la probabilité p et face avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu pile ;
- soit si l'on a obtenu n fois face.

On note T_n la variable aléatoire désignant le nombre de lancers effectués, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer la probabilité $P(T_n = k)$.

2. Déterminer $P(T_n = n)$.

3. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

Exercice 10 (★★)

Soit m un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$.
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $(U_n = \frac{k}{n})$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. Donner la loi de X_1.

   Dans toute la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

3. Calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = i)$.

   On pourra utiliser l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}$ (voir l'**Exercice 9** du **TD 10** pour une démonstration).

4. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Exercice 11 (★★)

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

- X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ;
- $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages.

On considère enfin T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Par exemple, si $n = 10$ et si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

1. Loi de X_k :

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k. Rappeler son espérance et sa variance.

2. Loi de S_k :

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $S_k(\Omega)$.

   (b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

      i. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.

      ii. En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

   (c) i. Pour $k, j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

      ii. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $i \geq k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

iii. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{P}(k)$ la propriété :

$$\text{"}\forall i \in [\![k, n]\!], \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}\text{"}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

3. Loi de T_n :
   (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $(T_n > k)$ et $(S_k \leq n-1)$.
   (c) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$
4. Convergence en loi de la suite (T_n) :
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$.
   (b) Démontrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

Exercice 12 (★★)

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = e^{-n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}$.

Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre 1.

1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. (a) Exprimer u_n à l'aide de S_n.
   (b) Soit S_n^* la variable centrée réduite associée à S_n. Vérifier que : $\forall n \geq 1$, $u_n = P(S_n^* \leq 0)$.
3. En appliquant le théorème limite central, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ ainsi qu'un équivalent de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13 (★★)

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(1/2)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n ?
   (b) Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. (a) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait l'égalité : $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{K_\varepsilon}{n}$.
   (b) En déduire que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \dfrac{1}{2}$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$.
3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème limite central, que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (★)

Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louées ait un accident est égale à 0.2%.
On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres.
Chaque jour, 1000 voitures de la société sont en circulation. On note N le nombre de voitures accidentées.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'il y ait au moins 5 voitures accidentées dans la journée.

   On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Exercice 15 (★)

Un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots.
Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans une dictée contenant 2000 mots ?
On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Exercice 16 (★)

Un dé équilibré est lancé 9000 fois.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir le résultat 6 entre 1450 et 1550 fois.

   On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale.
2. Minorer également cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
