TD16

Calcul intégral

Calculs d'intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 xe^{-x^2}dx \qquad B=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} \qquad C=\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx \qquad D=\int_e^{e^2}\frac{\ln(x)}{x}dx$$

$$E=\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx \qquad F=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} \qquad G=\int_{-1}^1 |x|\,dx \qquad H=\int_{-1}^1 2^x dx$$

Exercice 2

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$A=\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx \qquad B=\int_1^e x(\ln(x))^2dx \qquad C=\int_2^3 \ln(x)dx \qquad D=\int_{-1}^1 x^2e^xdx$$

$$E=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx \qquad F=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}dx \qquad G=\int_{-1}^1 x2^xdx \qquad H=\int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

Exercice 3

1. Déterminer les réels a,b,c tels que : $\forall x\neq 0,\ \dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$.

Exercice 4

Soit les intégrales $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3}dx$ et $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-2x^3}{(1+x^3)^2}dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}J$.
2. Déterminer les constantes réelles a,b,c telles que : $\forall x\neq -1,\ \dfrac{x-1}{1+x^3}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.
3. En déduire la valeur de I puis celle de J.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$I=\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx\ (t=\sqrt{x}) \qquad J=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx\ (t=e^x)$$

$$K=\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx\ (t=3x^2+1) \qquad L=\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}\ (t=\sqrt{x})$$

$$M=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx\ (t=e^{\sqrt{x}}) \qquad N=\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\ (t=\frac{x}{x+1})$$

$$O=\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}\ (t=x^2+1) \qquad P=\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx\ (t=\sqrt{x^3+1})$$

Exercice 6
Le but de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. En déduire la valeur de I en posant $t = \sqrt{e^x+1}$.

Suites définies avec une intégrale

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. (a) Calculer J_1.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (d) En déduire la convergence de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) En intégrant par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$
   (b) Étudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2\,(\ln(x))^n\,dx$.

1. Calculer I_1.
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1,e]$, $\ln(x) \leq \dfrac{x}{e}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n.$$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n}dx$. On a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.

(c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Justifier que $\ln(2) - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)}dx$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 10

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}dx$. On a donc, en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx$.

1. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -1 et 1, on ait :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

   (b) En déduire la valeur de u_0.

   (c) Déterminer u_1.

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

   (b) En déduire u_2 et u_3.

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 0$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suites (u_n) est convergente.

   (d) En minorant $1 - x^2$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$.

   (e) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 12

Soit x un réel positif, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{x^n}{n!}e^x$.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \leq e^x$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente.

4. En remarquant que $\dfrac{x^n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

5. (a) A l'aide des questions précédentes, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

   (b) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$.

Comparaison série-intégrale

Exercice 13

1. (a) Soit un entier $k \geq 2$. Justifier que, pour tout $x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

   (b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{dx}{x\ln(x)}$.

   (c) Soit un entier $n \geq 2$. En sommant les inégalités pour k allant de 2 à n, montrer que :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

   (d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dx}{x^2}$.

   (b) Soit un entier $n \geq 1$. En sommant les inégalités précédentes, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

   (c) En déduite la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 14

L'objectif de cet exercice est de déterminer le comportement asymptotique de la série harmonique, dont la n-ième somme partielle sera notée $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que :
$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$
3. En déduire que la série harmonique diverge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 15

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(x)dx \leq \ln(k+1)$.
2. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$\int_1^n \ln(x)dx \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(x)dx$$
3. Soit $a, b \in]0, +\infty[$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_a^b \ln(x)dx$.
4. En déduire un encadrement de $\ln(n!)$ puis de u_n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Fonctions définies avec une intégrale

Méthode.

Considérons une fonction φ de la forme $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$:

- **Ensemble de définition :** φ est définie sur un intervalle I si les fonctions u et v sont définies sur I à valeurs dans un intervalle J et si f est continue sur J.
- **Dérivée :** La fonction f étant continue sur J, elle y admet une primitive F et on a :
$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$
Si u et v sont dérivables sur I, alors φ est aussi dérivable sur I et on a avec la formule sur la dérivée des fonctions composées :
$$\forall x \in I,\ \varphi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice 16

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, justifier qu'elle est dérivable sur celui-ci et calculer sa dérivée :

$$\varphi_1(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad \varphi_2(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \varphi_3(x) = \int_x^{2x} \ln(t)dt, \quad \varphi_4(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+e^t}$$

Exercice 17
On considère la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\varphi$ de φ.
2. Justifier que φ est dérivable sur $\mathcal{D}_\varphi$.
3. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi(1)$. En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$.
4. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

Exercice 18
On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^3} \frac{dt}{t^4+1}$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que φ est impaire.
3. Étudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

Exercice 19
Pour tout $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étudier la parité de φ.
3. Étudier le signe de φ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\varphi'(x)$.
5. En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20
On définit la fonction φ sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \ln(2) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1[, \ \varphi(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $[0,1]$.
2. (a) Pour tout réel $x \in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.
   (b) Établir que, pour tout réel $x \in]0,1[$, on a : $x^2\ln(2) \leq \varphi(x) \leq x\ln(2)$.
   (c) En déduire que φ est continue sur $[0,1]$.
3. Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, puis déterminer ses variations.

Intégrales impropres

Exercice 21

1. Montrer que les intégrales suivantes convergent et donner leur valeur :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \qquad J = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$$

2. Montrer que les intégrales suivantes divergent :

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad L = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

3. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, si les intégrales suivantes convergent et, si c'est le cas, donner leur valeur :

$$M = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}dx \qquad N = \int_1^{+\infty} x\ln(x)dx.$$

4. Déterminer, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1+e^x}$, si l'intégrale suivante converge et, si c'est le cas, donner sa valeur :

$$O = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

   On pourra remarquer que : $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$.

Exercice 22

Déterminer la nature et la valeur (lorsqu'elles convergent) des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} \qquad J = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$L = \int_1^{+\infty} \ln(x)dx \qquad M = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} \qquad N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\, x\,|}{(1+x^2)^2}dx$$

Exercice 23

1. Trouver trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$: $\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

2. En déduire la convergence puis la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)^2}dx$.

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2. En déduire la convergence puis la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

Exercice 25

1. Montrer que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

   On pourra étudier les trois cas suivants : si $\alpha < 1$, si $\alpha = 1$ et si $\alpha > 1$.

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
   On pourra étudier les trois cas suivants : si $\alpha < 0$, si $\alpha = 0$ et si $\alpha > 0$.

Exercice 26

1. Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ converge et déterminer sa valeur.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 27

1. (a) Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
   (b) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et préciser sa valeur.
   (c) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
2. (a) Étudier la parité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}$.
   (b) Soit $A > 0$. A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+e^x}dx$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^A g(x)dx$ et en déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} g(x)dx$.
   (d) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$.

Exercice 28

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $A \geq 0$, on pose :

$$I_n(A) = \int_0^A x^n e^{-x}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

1. Soit $A \geq 0$.
   (a) Calculer $I_0(A)$.
   (b) En déduite que J_0 est convergente et donner sa valeur.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.
2. (a) Déduire des questions précédentes que J_n est convergente (on pourra effectuer une récurrence).
   (b) Quelle relation lie J_{n+1} et J_n ?
   (c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n.
3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-2x}dx$ est convergente et donner sa valeur.