TD 16

Fonctions de deux variables

Exercice 1 (★★)

Déterminer les extremums locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = xy(x+y-1)$.
2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Exercice 2 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que $A = (-1,0)$ est le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq xe^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 3.(b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (★★)

On considère la fonction f définie, pour tout (x,y) de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :
$$f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
5. (a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.
   (b) En déduire que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :
$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y).$$
Montrer que : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $g(x,y) \geq 2\ln(2)$.

Exercice 4 (★★)

1. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.
   (a) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2).$$
   (a) Déterminer le seul point critique de f, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
   (b) Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.
   (c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 5 (★★)

On considère l'application $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0, +\infty[$, par : $f(t) = t^2 - t\ln(t)$.
On admet que : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

1. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.
2. On considère l'application $F :]0; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ définie par :
$$\forall (x,y) \in]0; +\infty[^2, \quad F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$
   (a) Calculer les dérivées partielles premières de F pour tout $(x,y) \in]0; +\infty[^2$.
   (b) Soit $(x,y) \in]0; +\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si
$$x > 1, \qquad y = \frac{x}{\ln(x)} \qquad \text{et} \qquad f(\ln(x)) = 1.$$
   En déduire que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).
   (c) La fonction F admet-elle un extremum local sur $]0, +\infty[^2$?

Exercice 6 (★★★)

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f(t) = -t\ln(t) + t^{1/3}$.
On note D l'ensemble des couples (x,y) appartenant à $]0; +\infty[^2$ tels que $x + y < 1$ et $2x < 1$. On considère la fonction G définie sur D par :
$$G(x,y) = f(x+y) - \frac{1}{2}f(2x).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0; 1[$ et calculer f' et f''.
2. Justifier que l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution, notée α.
   Montrer que : $e^{-1} < \alpha < 1$.
3. Représenter l'ensemble D.
4. G admet-t-elle un extremum local ?

Exercice 7 (★★)

On considère la fonction f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Calcule les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}$

   (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

   (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

   (d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

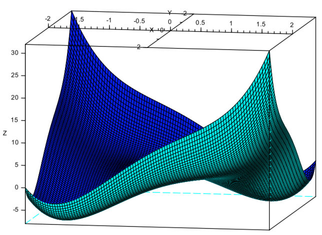
4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

   (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

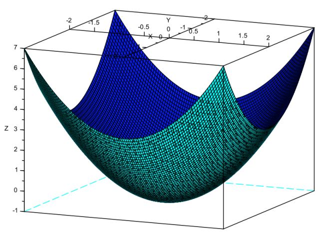
5. (a) Compléter la deuxième ligne du script `Python` suivant afin de définir la fonction f.

```
1  def f(x,y):
2      z = .....
3      return(z)
4
5  x = np.linspace(-2,2,101)
6  y = x
7  X,Y = np.meshgrid(x,y)
8  ax.plot_surface(X, Y, f(X, Y))
9  plt.show()
```

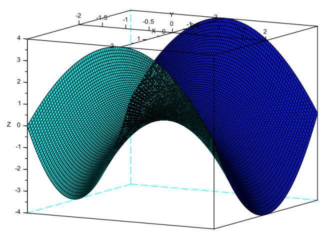
   (b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 8 (★★)

1. Pour tout entier naturel k, on pose : $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

   (a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

   (b) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^{a} t^k e^{-t} dt$.

   Établir, en utilisant une intégration par parties, la relation suivante :

$$I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}.$$

(c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2. Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3. (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.
   (c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.
   (a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :
   $$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \dots$$
   (b) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 + \dots$
   (c) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Exercice 9 (★★★)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives p_1, p_2 et p_3. On a donc $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on admet que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $0 < p_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.
   (b) Donner la loi de X_i, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.
   (c) En déduire l'espérance $E(X)$ de X.

   La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels p_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :
   $$f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n.$$
2. (a) On pose $p_1 = x$ et $p_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.
   (b) Montrer que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[\times]0, 1[$.
   (c) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (d) Démontrer que f présente un unique extremum local et donner sa nature.
   (e) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.
