TD19

Variables aléatoires à densité

Variables aléatoires à densité

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X possède une espérance et la déterminer.
4. Montrer que X possède une variance et la déterminer.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2, \\ 0 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. Montrer que la fonction f est une densité.
3. On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln(x)}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$
   (a) Soit $A > 1$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}dx$.
   (b) En déduire que f est une densité de probabilité.
2. On considère dans la suite de cet exercice une variable aléatoire X dont f est une densité.
   (a) Calculer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
   (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
   (d) Montrer que pour tout réel $A > 1$:
   $$P_{(X>A)}(X > 2A) = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)}.$$
   (e) En déduire $\lim\limits_{A \to +\infty} P_{(X>A)}(X > 2A)$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire à densité dont f est une densité.
   Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer les probabilités suivantes :
   $$P(X \geq \ln(2)), \qquad P(\ln(2) \leq X \leq \ln(8)), \qquad P_{(X\geq \ln(2))}(X \leq \ln(8)).$$
   On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.
4. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$.
5. Établir que X possède une espérance et donner la valeur de $E(X)$.

Exercice 5

On considère X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   Montrer que Y est à densité et en donner une densité f_Y (qu'on exprimera à l'aide de f_X).
2. On pose $Z = X^2$ et on admet que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   Montrer que Z est à densité admettant pour densité f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. On pose $T = e^X$ et on admet que T est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   Montrer que T est à densité admettant pour densité f_T définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} f_X(\ln(x)) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Justifier que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.
2. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
3. On pose $Y = -3X + 2$.
   (a) Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.
   (b) Y admet-elle une espérance ?

4. On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$.
    (a) Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z.
    (b) Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.
    (c) Z admet-elle une variance ?

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1. Justifier que X est à densité.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
3. On pose $Y = \varphi(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
    (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
    (b) En déduire que Y est à densité et déterminer une densité de Y.
    (c) Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   On considère alors la variable aléatoire X dont f est une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer $P(X \leq 1/4)$, $P(X \geq 1/2)$, $P(|X| \leq 3/4)$.
4. On pose $Y = 1 - \ln(X)$.
    (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
    (b) En déduire que Y est à densité et en donner une densité.

Lois à densité usuelles

Exercice 9
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité.
2. On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.
    (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
    (b) Déterminer le réel x, appelé médiane de X, tel que $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$.
3. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
    (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
    (b) En déduire que Y est à densité et reconnaître la loi suivie par Y.

Exercice 10

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Soit A un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^A 2e^{-2(x-a)}dx$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(x-a)}dx$ converge et donner sa valeur.

2. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. On note X une variable aléatoire admettant f comme densité. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - a$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   (b) En déduire que Y est à densité et reconnaître la loi suivie par Y.

   (c) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

   (d) En déduire que X admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

Exercice 11

On désigne par x_0 et α deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_0, \\ 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité.

2. On désigne par X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln\left(\dfrac{X}{x_0}\right)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

   Démontrer que Y est à densité et qu'elle suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 12

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

   (a) Vérifier que la fonction f est paire.

   (b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère la variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

   (c) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (d) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge.
   (e) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xf(x)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $E(X) = 0$.

2. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = \ln(1 + e^x).$$

   (a) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
   (b) Exprimer, pour tout $y \in I$, $\varphi^{-1}(y)$.
   On définit la variable aléatoire réelle Y par : $Y = \varphi(X)$.
   (c) Justifier que $P(Y \leq 0) = 0$.
   (d) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (e) Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$.
2. En déduire que Y est à densité et reconnaître la loi de Y.
3. En déduire une fonction Scilab permettant de simuler la loi exponentielle.

Exercice 14

Soit $a, b \in]0, +\infty[$. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et Y suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(b)$.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est aussi une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont précisera le paramètre.
2. On pose $T = \max(X, Y)$ et on admet que T est aussi une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de T.
   (b) Justifier que T est à densité.
   (c) Déterminer une densité de T.

Exercice 15

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. On pose $Y = e^{-\lambda X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

1. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y. Exprimer F_Y à l'aide de F_X.
2. En déduire que Y est à densité.
3. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Notons Φ sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
2. En déduire que $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que, pour tout réel positif x,
$$P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$$
où Φ est la fonction de répartition associée à X.

Exercice 17

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$. A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, donner les valeurs approchées des probabilités suivantes :
$$P(X < 7,5), \quad P(X > 8,5), \quad P(6,5 < X < 10), \quad P_{(X>5)}(X > 6).$$
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale. Toujours à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, déterminer l'espérance et la variance de X sachant que :
$$P(X < -1) \simeq 0,05 \quad \text{et} \quad P(X > 3) \simeq 0,12.$$

Exercice 18

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minute, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table de la loi normale centrée réduite.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table.