TD2

Fonctions réelles d'une variable réelle

Étude de fonctions

Exercice 1

On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2, 8]$.

Déterminer graphiquement :

- L'image de 3,
- L'image de 0,
- L'image de 8,
- Le(s) antécédent(s) de 2,
- Le(s) antécédent(s) de -1,
- Le(s) antécédent(s) de -2.

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer, si c'est possible, le ou les antécédents par les fonctions.

1. Antécédents de -10, -9 et 2 par $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
2. Antécédents de -1 par $g(x) = \dfrac{-5x+1}{2x^2+x+1}$.
3. Antécédents de 0, 1 et 2 par $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.
4. Antécédents de -2, 0 et 1 par $i(x) = \dfrac{e^{2x}}{4}$

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : (\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 4 \qquad (E_2) : e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \qquad (E_3) : e^x - \frac{2}{e^x} = 1$$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : (\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 < 0 \qquad (I_2) : \ln(x) - 2 + \frac{1}{\ln(x)} > 0 \qquad (I_3) : e^x + \frac{2}{e^x} \leq 3$$

Exercice 4

Calculer les sommes et les produits suivants (pour tout entier $n \geq 2$) :

$$A = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \qquad B = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \qquad C = \prod_{k=1}^{n} e^k \qquad D = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{2k}}{3^k}$$

Exercice 5

Soit f la fonction **partie décimale** définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Calculer les parties décimales de 0.4, 2, 2.3, -3.5, -4 et -5.2.
2. Calculer $f(x)$ si $x \in [0, 1[$.
3. Montrer que, pour tout réel x, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
4. En déduire que, pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$.
   On dit que f est périodique de période 1.
5. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
6. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 1[$ puis sur $[-3, 3]$. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (\lfloor x \rfloor - x)^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x+1) = f(x) + 1$.
2. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 1]$ puis en déduire le tracer sur $[-3, 3]$. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x+2}{e^x+1} \qquad f_2(x) = \sqrt{-x^2+4x+12} \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{|x|-1}$$

$$f_4(x) = \ln(|x|-2) \qquad f_5(x) = \sqrt{\frac{2-3x-2x^2}{x^2+5x+4}} \qquad f_6(x) = \frac{\sqrt{2-3x-2x^2}}{\sqrt{x^2+5x+4}}$$

Exercice 8

Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \qquad f_2(x) = \frac{xe^x - x}{e^x+1} \qquad f_3(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad f_5(x) = \frac{|x|}{x} \qquad f_6(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

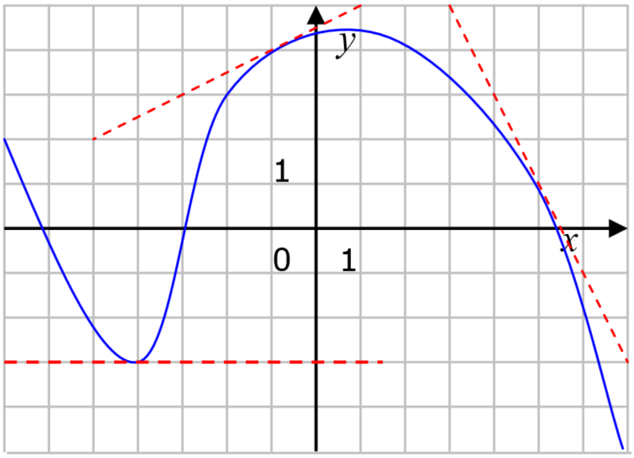
$$f_1(x) = \frac{x+1}{2x^2-5} \qquad f_2(x) = 2x\sqrt{3x-1} \qquad f_3(x) = \sqrt{\frac{x^2+6x+5}{x^2-1}} \qquad f_4(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$$

$$f_5(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right) \qquad f_6(x) = \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad f_7(x) = \frac{1}{(x^2-3x+2)^3} \qquad f_8(x) = xe^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_9(x) = \ln(e^x-1) \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{(\ln(x))^2} \qquad f_{11}(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} \qquad f_{12}(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f_{13}(x) = x^{1/x} \qquad f_{14}(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad f_{15}(x) = (2x)^{\sqrt{1+x^2}} \qquad f_{16}(x) = (2-x)^{\ln(x)}$$

Exercice 10
On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement :

- Les images $f(-4)$, $f(-1)$ et $f(5)$.
- Les nombres dérivées $f'(-4)$, $f'(-1)$ et $f'(5)$.
- Les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en -4, en -1 et en 5.

Exercice 11
Soit $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$.

Exercice 12
Soit $f(x) = 2\ln(x) - x^2 + 2$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 2$.

Exercice 13
1. (a) Étudier les variations de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.
   (b) En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. (a) Étudier les variations de la fonction $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (b) En déduire que g admet un maximum sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera.
3. (a) Étudier les variations de la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.
   (b) En déduire que h admet un minimum sur $]1, +\infty[$ que l'on déterminera.

Exercice 14
1. (a) Étudier les variations des fonctions $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
   (b) En déduire que :

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. (a) Étudier les variations des fonctions $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x-1}{x}$ et $g(x) = x - 1 - \ln(x)$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x > 0,\ \frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Exercice 15

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Justifier que, pour tout réel x, $(e^x - x)$ est strictement positif.
2. (a) Étudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (c) A l'aide de la question 1., étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite T.
   (d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x + 4)e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 4$.
3. On se propose d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (2x + 4)$.
   (a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. Étudier le sens de variation de g' sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Indiquer le sens de variation de g. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Bijections et bijections réciproques

Exercice 19

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

   On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.

3. Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

4. Établir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.

3. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

4. Montrer que $\alpha \in [1, 2]$.

5. Quelle est la valeur de $\alpha \ln(\ln(\alpha))$?

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   (b) En déduire que f' admet un minimum sur $]0, +\infty[$ que l'on déterminera puis donner le signe de f' sur $]0, +\infty[$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f.

   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

   (c) Vérifier que $\alpha = 1$.

Exercice 22

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

   (a) Étudier les variations de φ et dresser son tableau de variation.

   (b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2, -1]$.

   (c) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$.

(a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$.

(b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

(d) Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0.

Exercice 23

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. (a) Étudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (b) En déduire que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
3. (a) Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.
   (b) En déduire que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
4. Démontrer que $g_{|]0,+\infty[}$ est la bijection réciproque de $f_{|]1,+\infty[}$.
   Que peut-on en déduire sur les courbes représentatives de f et g ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f puis celle de g.

Exercice 24

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f$ de f et $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Étudier la parité de f et de g.
3. (a) Étudier les variations de f.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.
   (b) En déduire que f réalise une bijection de $]-1, 1[$ dans un intervalle à déterminer.
4. (a) Étudier les variations de g.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.
   (b) En déduire que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.
5. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f puis celle de g.

Exercice 25

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ et $g(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + \sqrt{e^{2x}+4}}{2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

3. (a) Justifier que la fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son expression.
   (b) Justifier que la fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donner son expression.
   (c) Que peut-on en déduire ?
4. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x + \ln(1 - e^{-2x})$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) < x$.

Exercice 26
Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.
4. Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 27
Soit f une fonction définie par $f(x) = e^x - e^{-x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les variations de f.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.
5. Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 28
Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]3, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ *et que* $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.
2. Déterminer l'expression de la bijection réciproque de $f_{|]3,+\infty[}$

Exercice 29
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.
3. Expliciter la bijection réciproque de la restriction de f sur $[-1, +\infty[$.