TD2

Applications linéaires

On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf précision supplémentaire, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et Id_E l'application identité.

Rappels de cours

- Définition d'une application linéaire de E dans F, d'un endomorphisme de E, d'un isomorphisme de E sur F et d'un automorphisme de E. $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est complètement déterminé par l'image d'une base de E.

  Savoir faire : Comment montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire ?

- $\Big(\mathcal{L}(E), +, \circ\Big)$ est un anneau et $\Big(GL(E), \circ\Big)$ est un groupe.

- Définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Liens avec injectivité/surjectivité. Définition du rang de f. Théorème du rang.

  Savoir faire : Comment déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

- Définition d'un projecteur. Quand $E = F \oplus G$, définition de la projection p sur F dans la direction de G, p est linéaire et $p \circ p = p$, $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

- Quand $E = F \oplus G$, définition de la symétrie s par rapport à F dans la direction de G, s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Ker}(s)$, $\mathrm{Im}(s)$, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

- Définition d'une forme linéaire. Base duale.

Anthony Mansuy
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr` - E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Applications linéaires - Généralités

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z) \end{array}$;

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (4x+y, x-y, 2x+3y) \end{array}$;

c) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$;

d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array}$;

e) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & [A,M] = AM - MA \end{array}$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles linéaires :

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, xy, y-z) \end{array}$;

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, y, 2) \end{array}$.

Exercice 3

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. On appelle noyau de f l'ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. On appelle image de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 4

Déterminer une base du noyau et de l'image (donner une base) des applications linéaires suivantes :

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, y-x, 0) \end{array}$;

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z, -x+2y+z) \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + i\bar{z} \end{array}$;

d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P - (X+1)P' \end{array}$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions lisses de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Notons :

$$f_1 \ : \ x \mapsto 1\,, \qquad f_2 \ : \ x \mapsto x\,, \qquad f_3 \ : \ x \mapsto \sin(x)\,, \qquad f_4 \ : \ x \mapsto \cos(x)\,.$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. On note $F = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$ et on considère l'application

$$\Phi \ : \ F \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})\,, \quad f \mapsto f + if'\,.$$

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$, et pour chacun d'eux, donner une base.

(c) A-t-on $F = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus \mathrm{Im}(\Phi)$?

3. Mêmes questions (a), (b) et (c) pour $\Psi \ : \ F \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,, \quad f \mapsto f'$.

Exercice 6

Démontrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1), \quad f(1,1,0) = (1,0), \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Calculer $f(x,y,z)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4 \,, \quad f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 \,, \quad f(e_3) = e_1 + e_4 \,, \quad f(e_4) = e_2 - e_3 + e_4 \ .$$

1. Montrer que $f \circ f = 0$ et déduisez-en que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, en donnant leurs dimensions et une base pour chacun d'eux.
3. Compléter la base de $\mathrm{Ker}(f)$ en une base de E.

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. On note $f(\mathcal{B})$ la famille $\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$ de n vecteurs de F.

1. Que peut-on dire de $f(\mathcal{B})$ dans le cas où f est injective? surjective? bijective?
2. Si $\dim(E) < \dim(F)$, f peut-elle être injective? surjective?
3. Même question si $\dim(E) > \dim(F)$.
4. Si $\dim(E) = \dim(F)$, montrer que f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que :

$$E = Ker(f - 2Id_E) \oplus Ker(f - 3Id_E).$$

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = Im(f) + Ker(f) \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = Im(f^2);$$
$$Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad Ker(f) = Ker(f^2).$$

Exercice 11

Soit E un K-espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g.

Projecteurs, symétries, homothéties

Exercice 12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. On définit alors deux applications p et s :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a - b \end{array} \right.$$

On dit que p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

1. (a) Montrer que p est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id) = F$ et que $\mathrm{Ker}(p) = G$.
2. (a) Montrer que s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = Id$.
   (b) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$.

Exercice 13

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $F = Vect(e_1, e_2)$ et $G = Vect(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. Donner l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à G et parallèlement à F.

Exercice 14

1. Soit p un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$ (on dit alors que p est un projecteur de E).
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Montrer que p est la projection vectorielle sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.
2. Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = Id$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$.

Exercice 15

Soit $A(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. On considère l'application

$$\phi \ : \ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad P(X) \mapsto R(X),$$

où $R(X)$ est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $A(X)$.

1. Montrer que ϕ est un projecteur.
2. Calculer $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

1. Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur.

2. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \neq 1$, $p - \lambda Id_E$ est un automorphisme.

Exercice 17
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer qu'alors :

$$Im(p+q) = Im(p) \oplus Im(q) \text{ et } Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q).$$

Exercice 18
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

$$\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \Leftrightarrow Ker(p) = Ker(q) \quad ; \quad \begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases} \Leftrightarrow Im(p) = Im(q).$$

Exercice 19
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Déterminer le noyau et l'image de r en fonction de ceux de p et q.

Exercice 20
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda_x \cdot x.$$

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 21
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quel est le centre de $GL(E)$?

Rang d'une application linéaire

Exercice 22
Déterminer le rang de des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-t) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-2z, x-3y+11z, -3x+4y-18z) \end{array}$$

Exercice 23
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que :

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g).$$

Exercice 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $rg(g \circ f) \leq \min(rg(g), rg(f))$.
2. Déterminer $rg(f) + rg(g)$ lorsque $f + g \in GL(E)$ et $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si n est pair.

Exercice 27

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = Id_E$ et $rg(f) + rg(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$.
Montrer que f et g sont des projecteurs.