TD2

Suites numériques

Rappels de cours

- Définitions d'une suite réelle (explicitement, par récurrence, implicitement). Opérations sur les suites, monotonies, suites bornées.
- Suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.

  Savoir faire : Mettre une suite usuelle sous forme explicite.
- Limite d'une suite réelle : définition, unicité de la limite. Une suite convergente est bornée. Limites et inégalités. Opérations sur les limites.

  Savoir faire : Déterminer la limite d'une suite donnée sous forme explicite par opérations sur les limites (avec éventuellement une forme indéterminée à lever) ?
- Théorème des suites monotones. Théorème des suites adjacentes.

  Savoir faire : Utiliser les théorème des suites monotones pour l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que deux suites sont adjacentes.
- Suites extraites. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

  Savoir faire : Démontrer qu'une suite est divergente à l'aide de suites extraites.
- Extension aux suites à valeurs complexes.

Anthony Mansuy
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr` - E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Suites usuelles

Exercice 1

Exprimer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$.

Exercice 2

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 3

On monte un escalier de n marches. A chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note p_n le nombre de façon d'arriver à la n-ième marche.

1. Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Limites

Exercice 4

Étudier la convergence des suites de termes généraux u_n avec :

(1) $u_n = e^n - n$ (2) $u_n = (-1)^n$ (3) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(4) $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ (5) $u_n = n^{1/n}$ (6) $u_n = (2 + \cos(n))^{1/n}$

(7) $u_n = \cos(n\theta)$ (8) $u_n = e^{in\theta}$ (9) $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n}$

(10) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{k}}$ (11) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ (12) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{(n+k)^2}$

Exercice 5

Soit $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

1. Trouver des suites extraites de (u_n) convergentes.
2. En déduire que (u_n) est divergente.

Exercice 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose que (u_n) est bornée et que (v_n) converge vers 0. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.
2. On suppose que (u_n) et $(u_n + v_n)$ convergent. Montrer que (v_n) converge.
3. On suppose que (u_n) et $(u_n v_n)$ convergent. Peut-on affirmer que (v_n) converge ?

Exercice 7

Donner dans chaque cas un exemple de suite (u_n) :

1. ni minorée, ni majorée;
2. minorée, non majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$;
3. positive qui tend vers 0 sans être décroissante.

Exercice 8

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n est strictement inférieur à v_n.
2. Soit (u_n) une suite dont les termes sont tous entiers.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire les limites des suites :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 10

Montrer que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels (en d'autres termes, que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 11

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 12

On considère la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que, pour tout entier k non nul, $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire que, pour tout entier n non nul, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$.
3. En déduire la limite puis un équivalent simple de (S_n).

Exercice 13

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que (u_n) tend vers 0 lorsque $\ell < 1$.
2. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque $\ell > 1$.
3. Observer que, dans le cas $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 14

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que (u_n) tend vers 0 lorsque $\ell < 1$.
2. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque $\ell > 1$.
3. Observer que, dans le cas $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 15

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2p}), (u_{2p+1}) et (u_{3p}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 16

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ des moyennes
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$
converge aussi vers ℓ.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{n} = 0$.
Donner un exemple d'une telle suite qui ne soit pas convergente.

Exercice 17

On dit qu'une suite réelle (u_n) satisfait le critère de Cauchy lorsqu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ \mid u_p - u_q \mid \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente satisfait le critère de Cauchy.
2. Inversement, montrer à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'une suite vérifiant le critère de Cauchy est convergente.

Suites monotones, suites adjacentes

Exercice 18

Montrer la convergence de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 20

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, ainsi que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et que $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
3. En déduire qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite respective.

Exercice 21

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et convergent vers une même limite.

Exercice 22

On suppose que (u_n) est croissante et que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 23

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose

$$a_n = \sup_{p\geq n} u_p \quad \text{et} \quad b_n = \inf_{p\geq n} u_p.$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent.
2. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si les limites des suites (a_n) et (b_n) sont égales.

Exercice 24

Soient $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ les suites définies par :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ convergent vers une même limite ℓ.
2. En décomposant la fraction $\dfrac{1}{k^2-1}$ en éléments simples, donner une expression simplifiée de u_n et en déduire ℓ.

Exercice 25

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} u_k.$$

Montrer la convergence de la suite (S_n) en étudiant les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Exercice 26

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune ℓ est un nombre irrationnel.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{x^n}{n!} e^{1-x} dx$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \in +\infty} I_n = 0$.
   (c) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite et un équivalent de (S_n).
4. Montrer que $u_n = S_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
6. Montrer que les suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (T_n) converge.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{2n} = S_{2n} - S_n$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Suites récurrentes, suites implicites

Exercice 28

Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Exercice 29

Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

Exercice 30

Étudier la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

Exercice 31

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. Déterminer, si elle existe,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{(u_n - \sqrt{a})^2}.$$

Exercice 32

Établir la formule :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}.$$

Exercice 33

On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$ notée α.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 34

Dans cet exercice, on cherche à résoudre numériquement l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) : \quad x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

1. Montrer que l'équation (E) a une seule solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera $\alpha \in [1/3, 1]$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

   (a) Montrer que l'intervalle $[1/3, 1]$ est stable par f et que, pour tout $x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{135}{169}$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/3, 1]$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n.$$

   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 35

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on étudie l'équation :

$$(E_n) : \; x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1.$$

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$ et que x_n est un élément de $[1/2, 1]$.

2. Montrer la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite.

Exercice 36

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.

3. En déduire la limite de (u_n) puis un équivalent.

4. Montrer que $u_n - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n^6}$.

Exercice 37

Partie I : Préliminaires

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{e^{x+1}}{2x+1}$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{2x+1} > e^{-x-1}$.

   Donnée numérique : $e^{3/2} \simeq 4,48$.

Partie II : Étude d'une suite implicite

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive notée u_n.
5. Monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$:
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.
   (b) En déduire que $f_n(u_{n+1})$ est positif.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
6. Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$:
   (a) Montrer que $u_n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Déterminer le signe de $f_n(n+1)$.
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

Exercice 38

Soit f la fonction définie par : $f(t) = \ln(1+t) + \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire l'allure de la courbe représentative de f.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation (E_n) : $f(t) = \dfrac{1}{n}$
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution α_n et une seule.
   (b) Déterminer le sens de variation puis expliciter la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}$ et en déduire la limite de la suite $(n\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 39

On considère la fonction $f(x) = e^x + x$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
2. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq \ln(n)$.
4. En déduire que : $\forall n \geq 1$, $\ln(n - \ln(n)) \leq x_n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\ln(n)}$.

Exercice 40

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation (E_n) : $x + \ln(x) = n$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n.
2. Déterminer le sens de variation puis expliciter la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Donner le développement asymptotique à trois termes de u_n lorsque n tend vers l'infini.
