Exercices du chapitre 2

Exercice 1 :

Donner l'ensemble de définition, puis étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \frac{x+2}{x^3-x} \quad ; \quad x \longmapsto \frac{x^2-3x+1}{x^2+5\,x+4} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{x^6-1} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{\frac{2-3\,x-2\,x^2}{x^2+5\,x+4}} \quad ; \quad x \longmapsto \frac{\sqrt{2-3\,x-2\,x^2}}{\sqrt{x^2+5\,x+4}}$$

$$x \longmapsto \sin\left(\ln\left(\frac{x^2-4x+1)}{2x+3}\right)\right) \quad ; \quad x \longmapsto \ln\left(2-\ln x\right) \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{3-\ln x} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)}$$

$$x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-6) \quad ; \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad ; \quad x \longmapsto \cos(\ln x) \quad ; \quad x \longmapsto \ln(\cos x) \quad ; \quad x \longmapsto \ln(1+\cos(3\,x))$$

$$x \longmapsto \frac{\cos x}{\sqrt{3}\,\cos(2x)-2} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{5}^{\,x} \quad ; \quad x \longmapsto x^{\sqrt{5}} \quad ; \quad x \longmapsto x^x \quad ; \quad x \longmapsto (1+4\,x)^x \quad ; \quad x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2-x}}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(3x-1)=0$

b) $\ln(3x-2)<1$

c) $\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} \geqslant 0$

d) $\ln(x^2-1)=\ln(2-x)+\ln(3-x)$

e) $\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{x}+2>0$

f) $\mathrm{e}^{x}-3\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 4$

g) $x^{2\sqrt{2}}-3x^{\sqrt{2}}+2=0$

h) $x^{(x^2)}=(x^x)^x$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,x^2-4\,x+3}{x^2-6\,x+8}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\,x^3-4\,x+3}{x^2-6\,x+8}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^3+2\,x^2-7\,x-2}{x^2-6\,x+8}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to3^-}\left(\frac{x^2+4\,x-21}{\sqrt{4\,x+13}-5}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) \quad ; \quad \lim_{x\to3^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{x^2+x-12}}{x^2-4x+3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to1}\left(\frac{\sin(\pi\,x)}{\sin(2\pi\,x)}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\tan(3\,x)}{\sin(4\,x)}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\sin x}{(x+\frac{\pi}{2})\cos x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty}(x^2+7\,x+1)\,\mathrm{e}^{4\,x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^2-x+1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\,x}}{x^2+\ln x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-7}\left(\frac{\mathrm{e}^{x+7}-1}{x^2+5\,x-14}\right)$$

$$\lim_{x\to3^\pm}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-3}}}{x^2-5x+6}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\cos x}}-1}{\tan x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2x})}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}\ln x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-3\,x})}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{\sin x}$$

Exercice 4 :

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes : l'ensemble de définition, et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer la fonction dérivée.

$$x \longmapsto \frac{1}{2x^2-7x+6} \quad ; \quad x \longmapsto \frac{x^2-4\,x+3}{2x^2-7x+6} \quad ; \quad x \longmapsto \sin(x^2+3) \quad ; \quad x \longmapsto \ln\left(\frac{x^2-4\,x+3}{2x^2-7x+6}\right)$$

$$x \longmapsto \ln\left|\frac{x^2-4\,x+3}{2x^2-7x+6}\right| \quad ; \quad x \longmapsto \frac{1+3\,\sin x}{1+2\,\cos x} \quad ; \quad x \longmapsto \cos(x^2+3x+1)+\sqrt{2\,\sin(5\,x)+7}$$

$$x \longmapsto \ln(\ln(\ln x))) \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\,\tan(4\,x) \quad ; \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{1+x^2}} \quad ; \quad x \longmapsto \sqrt{3-\ln x}$$

Exercice 5 :

Étudier la nature des branches infinies dans les cas suivants et donner une allure de leur tracé au voisinage de ∞. Dans le(s) cas où $\mathscr{C}_f$ admet une (des) droite(s) asymptote(s) oblique(s), on précisera la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette (ces) asymptote(s), au voisinage de ∞.

1) $f(x)=\dfrac{3\,x^3+2\,x^2+5}{x^2+x+1}$ aux voisinages de $\pm\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ aux voisinages de $\pm\infty$

3) $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+3}$ au voisinage de $+\infty$

4) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+1}-3\,x$ au voisinage de $-\infty$ *(Dans ce cas, on ne cherchera pas la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote)*

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^3-x-5}-2\,x^2}{\sqrt{x^3+x^2+2}+\ln x}$ au voisinage de $+\infty$

6) $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)$ aux voisinages de $\pm\infty$

7) $f(x)=\dfrac{4\,\mathrm{e}^x+x+2}{\mathrm{e}^x-1}$ aux voisinages de $\pm\infty$

8) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{4\,x}-7\,x}{\mathrm{e}^x+3}$ aux voisinages de $\pm\infty$ *(Dans ce cas, on ne cherchera pas la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote)*

Exercice 6 :

Étudier et représenter graphiquement dans un repère orthonormé les fonction suivantes fonctions :

- $\triangleright$ $f_1(x)=\dfrac{2x^2-5x+11}{x-1}$
- $\triangleright$ $f_2(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$
- $\triangleright$ $f_3(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$
- $\triangleright$ $f_4(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x-3$
- $\triangleright$ $f_5(x)=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$
- $\triangleright$ $f_6(x)=\exp\left(-\dfrac{x+2}{x^2}\right)$
- $\triangleright$ $f_7(x)=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$
- $\triangleright$ $f_8(x)=(\ln x)^{\ln x}$
- $\triangleright$ $f_9(x)=x^{-x}$
- $\triangleright$ $f_{10}(x)=\dfrac{3}{2}\,x-3+\ln\left|\dfrac{x-4}{x-1}\right|$
- $\triangleright$ $f_{11}(x)=3\sin^5 x-5\sin^3 x+1$
- $\triangleright$ $f_{12}(x)=\cos x\;\mathrm{e}^{\tan x}$

Exercice 7 :

1) Linéariser $\mathrm{ch}^4 x$ et $\mathrm{sh}^5 x$.

2) Calculer $\mathrm{ch}(6x)$ et $\mathrm{sh}(5x)$ en fonction de $\mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{sh}\, x$.

3) Résoudre l'équation $\mathrm{ch}\, x = 2\,\mathrm{sh}\, x$

4) Simplifier les expressions suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition :

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1-\mathrm{th}\, x}{1+\mathrm{th}\, x}}\right) \quad ; \quad \frac{\mathrm{ch}(\ln x)+\mathrm{sh}(\ln x)}{x} \quad ; \quad x\left(\mathrm{ch}(\ln x)-\mathrm{sh}(\ln x)\right)$$

Devoir surveillé N°2 (2006-2007)

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2+x-6}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{x\,(\mathrm{e}^{3x}-1)}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x\,\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$$

On rappellera les limites de référence utilisées pour ces calculs.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}+x$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1) a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

   b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote au voisinage de $-\infty$. Donner une équation de cette droite.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. Donner une équation de cette droite, puis déterminer la position relative de cette droite par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3 :

1) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+2\,\ln(x-1)$

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de g.

   b) Calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathscr{D}_g$. En déduire le tableau des variations de g. On ne calculera pas les limites de g aux bornes de $\mathscr{D}_g$.

   c) Déterminer le signe de $g\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (On donne : $\ln 2\simeq 0,69$). En déduire que g est strictement positive sur $\mathscr{D}_g$.

2) On considère maintenant la fonction f donnée par : $f(x)=(x-1)^{x^2}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

   b) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

   c) i) Vérifier que pour tout $x\in\mathscr{D}_f$: $f'(x)=x\,f(x)\,g(x)$

      ii) En déduire le tableau de variation de f *(On utilisera le résultat de la question 1c)*.

   d) i) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

ii) On prolonge maintenant la fonction f en 1, en une fonction que l'on notera encore f, en posant $f(1) = \ell$ *(où $\ell = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ a été déterminé à la question 2b)*. Comment peut-on interpréter graphiquement la limite obtenue à la question 2d)i) ?

e) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie et préciser sa nature.

f) Tracer $\mathscr{C}_f$.

Extraits du devoir surveillé N°2 (2007-2008)

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x^2 + 3x - 2} \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{x+2} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin^2 x} - 1}{x^2}$$

Justifier les résultats.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie pour x réel par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - (x - 2)$$

1) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) Montrer que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Extraits du devoir surveillé N°2 (2009-2010)

Exercice 1 :

Déterminer les limite suivantes, en justifiant vos résultats :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3 + \sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$$

Exercice 2 :

On considère la fonction g définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^{x^2}$$

et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_g$ de g.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, la dérivée de g vérifie : $g(x) = x\,(1 + 2\ln x)\,\mathrm{e}^{x^2 \ln x}$.
   Préciser le signe de cette de dérivée sur $\mathscr{D}_g$.

3) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition $\mathscr{D}_g$, puis dresser le tableau des variations de g.
   On donne les valeurs approchées : $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \simeq 0,61$ et $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \simeq 0,83$

4) Montrer que $\mathscr{C}_g$ possède, quand x tend vers $+\infty$, une branche infinie que l'on précisera.

5) On pose $g(0) = \ell$, où ℓ est la limite de g en 0^+ ; calculer la limite de g en 0^+, puis interpréter graphiquement ce résultat.

6) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Extraits du devoir surveillé N°2 (2010-2011)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 2x^2 + 2}{x}.$$

On notera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$. Préciser si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale ou verticale.

3) Variations de f :

   a) Calculer la dérivée de f, en précisant sur quel ensemble f est dérivable.

   b) On pose $g(x) = 2x^2 - \ln(x) - 1$, sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction g est-elle dérivable sur sur $\mathbb{R}^{+*}$? Si oui, calculer sa dérivée et en déduire le tableau de variations de g.

   c) A l'aide du tableau, prouver que g admet un minimum et calculer la valeur de ce minimum. Justifier que ce minimum est strictement positif. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On rappelle que $\ln(2) > \frac{1}{2}$.

   d) Tracer le tableau de variations de f.

4) Prouver que $\mathscr{C}_f$ admet, en $+\infty$, une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Exercice 2 :

On considère h définie par

$$h(x) = 2\sqrt{x^2 + 4x} + x\ .$$

.

1) Quel est le domaine de définition de h ?

2) Déterminer la limite de h en $+\infty$.

3) Montrer que la courbe représentative de h, $\mathscr{C}_h$, admet, en $+\infty$, une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation. Étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

****