Feuille 2.- Séries de fonctions.

Exercice 1

Pour chacune des suites de fonctions ci-dessous, étudier la convergence simple, la convergence normale et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des séries de fonctions $\sum f_n(x)$.

$$(i)\ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \qquad (ii)\ f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}.$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) = xe^{-n\,x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge (simplement) sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$?
2. Prouver que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} .$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge (simplement) sur $[1, +\infty[$. Que vaut $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$?
2. Prouver que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[1+\varepsilon, +\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
   (on pourra montrer et utiliser que $\int_k^{k+1} \frac{1}{s^x}\,ds \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{s^x}\,ds$ pour $k \geq 2$.)

Exercice 5

Soit

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n},\ x \in]0, +\infty[.$$

1. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n(x)$.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que f est continue sur $]1, +\infty[$.
(on pourra montrer que pour $a > 1$ quelconque, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$).

Exercice 6

Soit

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge (simplement) sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
(on pourra montrer que f est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$). Donner une expression de f' à l'aide d'une série.

Exercice 7

Étudier la continuité et la dérivabilité de la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{x+n}$, lorsque cette somme existe.

Exercice 8

Montrer que la série de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}, \ n \geq 1$$

est uniformément convergente sur tout intervalle borné $[a, b]$ mais n'est absolument convergente en aucun point x.

Exercice 9

1. Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier la continuité de la somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
3. Mêmes questions avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+xn}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10

Soient $a \geq 1$ et $b > 0$.

1. Montrer que, pour tout $c \in [0,1[$,

$$\int_0^c \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c^{a+nb}}{a+nb}.$$

2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{a+nb}}{a+nb}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

Exercice 11

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^4+1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^4+1}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ converge pour tout $x \in]-1,1]$ et que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ est continue sur $[0,1]$.

2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   En déduire que $f(x) = \ln(1+x)$, $\forall\, x \in]-1,1[$.

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \;=\; \ln 2.$

Exercice 13

Soit x un nombre fixé dans $]0,1[$. On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n e^{in\theta}}{n}.$$

1. Montrer que cette série converge, que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction de θ) et que

$$f'(\theta) \;=\; \frac{ixe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}.$$

2. En déduire que, si $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\cos n\theta}{n} \;=\; -\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2).$$

Exercice 14

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^2+1}}$.

Démontrer que cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que f est continue sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 15

Soient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

a) Démontrer que $f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) En admettant que $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $\forall\, x \in]0, 2\pi[$, calculer $\lim_{x \to 0+} f(x)$.

Exercice 16

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

De quel "type" est cette série ?

Montrer que cette fonction est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et expliciter $f(x)$.

La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 17

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Vérifier que pour tout $x > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n}{1+n^2} \right) \left(\frac{e^{-nx} - 1}{nx} \right).$$

b) Montrer que,

$$\exists X_0 \in \mathbb{R}^+ \quad | \quad X \in]0, X_0] \;\Rightarrow\; \frac{e^{-X}}{X} \leq -\frac{1}{2}.$$

c) Démontrer que,

$$\forall\, A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

d) Déduire des points a) b) c) que :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]0, \eta],\ \frac{f(x) - f(0)}{x} \le -\frac{A}{2}.$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 18

Soit f une fonction continue et bornée sur $]-1,1[$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]-1,1[$ par :

$$f_0 = f, \qquad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \ \text{ si } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Vérifier que chaque fonction f_n est une fonction bornée sur $]-1,1[$.

2. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \in]-1,1[$. Montrer que S est bien définie sur $]-1,1[$.

3. Soit $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

a) Montrer que T est une fonction dérivable sur $]-1,1[$.

b) Montrer que $T'(x) = T(x) + f(x)$ pour $x \in]-1,1[$. En déduire une expression de $T(x)$, puis de $S(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Exercice 19

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

2. On rappelle l'inégalité

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2}\ \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2}.$$

a) En utilisant cette inégalité, montrer que

$$(f')^2(x) \le \frac{2}{3} f(x) f''(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

b) En déduire que la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ est concave (on montrera que sa dérivée seconde est négative).

Exercice 20

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i2^n x}}{n^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, la série de Taylor associée à f.

a) Vérifier que $f^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{nk}}{n^n}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \geq \frac{|x|^k 2^{k^2}}{k^{2k}}.$$

c) Déduire du point b) que pour $x \neq 0$,

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| = +\infty.$$

d) Déduire du point c) que la série de Taylor associée à f est divergente quand $x \neq 0$.

Exercice 21

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f_n(x) = \frac{\sin 2nx}{(nx+1)^2}.$$

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra montrer que $f \in C^0([a, +\infty[)$ pour tout $a > 0$).

3. Fixons $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $2n_0^2 b^2 \geq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [b, \pi - b]$, on note

$$a_n(x) = \frac{n}{(nx+1)^2}.$$

a) Montrer que pour chaque $x \in [b, \pi - b]$, la suite $(a_n(x))_{n \geq n_0}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite de fonctions $(a_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur $[b, \pi - b]$ vers la fonction nulle.

c) Montrer qu'il existe $M > 0$ dépendant de b tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [b, \pi - b]$,

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} \cos 2kx \right| \leq M.$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit

$$g_n(x) = \frac{n \cos 2nx}{(nx+1)^2}.$$

Déduire des points 3.a) 3.b) et 3.c) que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n$ converge uniformément sur $[b, \pi - b]$.

4. Déduire à l'aide du point 3.d) que f est de classe C^1 sur $]0, \pi[$.