Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2012-2013
MA 0831 - Master 1

TD

Espaces vectoriels préhilbertiens

Cas réel

Exercice 1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tA\ B).$$

1. Établir qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Établir que les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire la distance d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ aux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2 On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

1. Établir qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. (a) Établir que les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$ des fonctions paires et impaires sur $[-1,1]$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
   (b) En déduire la distance d'une fonction continue f aux sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$.
3. (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace $F = \{f \in E \mid \forall\, t \in [0,1], f(t) = 0\}$.
   (b) En déduire que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$ mais que $E \neq F \oplus F^\perp$.
4. On pose $f(x) = \cos(x)$ et $e_n(x) = x^n$.
   Déterminer $h \in Vect(e_0, e_1, e_2)$ réalisant la meilleure approximation de f au sens de la norme associée au produit scalaire.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale
$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$
existe et la calculer.

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$$

2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni de son produit scalaire usuel:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Établir qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) On pose $P(X) = p_0 + p_1 X + \ldots + p_n X^n$ où les réels $p_0, \ldots, p_n$ sont définis par :

$$\frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\ldots(X+n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{X+k+1}.$$

   Établir que la droite $Vect(P)$ est orthogonale au sous-espace $Vect(1, X, \ldots, X^{n-1})$.

   (b) Déterminer la distance du polynôme X^n au sous-espace $Vect(1, X, \ldots, X^{n-1})$.

3. On introduit la famille (L_n) des polynômes de Legendre sur $[0,1]$ définie par:

$$L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(X-1)^n).$$

   (a) Établir que la famille (L_n) est orthogonale, et calculer $\| L_n \|$.

   (b) Montrer que l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille $\left(\dfrac{L_n}{\| L_n \|}\right)$.

Exercice 5 Soient ϕ et ψ deux produits scalaires sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que:

$$\forall\ (x,y) \in E^2,\ (\phi(x,y) = 0) \implies (\psi(x,y) = 0).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\ (x,y) \in E^2, \psi(x,y) = \alpha\phi(x,y)$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et Φ une forme quadratique sur E. On suppose que Φ est définie.
Montrer que Φ est soit positive soit négative.

Cas complexe

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ l'espace vectoriel des suites complexes presque nulle.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : ((x_n), (y_n)) \to \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{x_n} y_n$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit $F = \left\{ (x_n) \in E \ \mid \ \sum_{k=0}^{+\infty} x_n = 0 \right\}$.

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 8 On pose pour tout couple de polynômes $(P,Q) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta}) d\theta.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire complexe sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2. Donner une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ orthonormale pour ce produit scalaire.

3. Calculer $\|P\|^2$ lorsque $P(X) = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \ldots + p_0$.
   En déduire que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$ avec égalité si et seulement si $p_{n-1} = \ldots = p_1 = p_0 = 0$.

Exercice 9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et N une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ tel que $\{x \in [a,b] \mid N(x) = 0\}$ est de cardinal fini.

1. Montrer que
$$(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_a^b \overline{P(t)} Q(t) N(t) dt$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que la quantité suivante existe :
$$\alpha_n = \min_{(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 N(t) dt.$$
On notera $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^n$ en lequel ce minimum est atteint.

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.
Pour cela, on rappelle le théorème de Stone-Weierstrass: Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Exercice 10 On note E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $f, g \in E$, on pose:
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire complexe sur E.
La norme associée à ce produit scalaire est $f \mapsto \| f \|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ et on l'appelle *norme de la convergence quadratique.*

2. Montrer que la famille de fonctions $e_k : x \to \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$ est orthonormale dans E.

Rappels:

- Si $f \in E, k \in \mathbb{Z}$, soit $c_k(f)$ le coefficient $\langle e_k, f \rangle$ et appelé *coefficient de Fourier* de f d'ordre k.
- On note $\mathcal{T}_n$ le sous-espace de E des *polynômes trigonométriques* de degré inférieur ou égal à n, dont une base orthonormale est $(e_k)_{|k| \leq n}$. L'espace $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques est dense dans E pour la norme uniforme: pour tout $f \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $T \in \mathcal{T}$ tel que:
$$\| f - T \|_\infty = \sup\{|f(t) - T(t)| \mid t \in \mathbb{R}\} \leq \epsilon.$$

3. Soit $f \in E$. Donner une expression de la projection orthogonale, notée $S_n(f)$ de f sur l'espace $\mathcal{T}_n$ et de la distance de f à $\mathcal{T}_n$.

4. Montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers f pour la norme $\| \cdot \|_2$.

5. En déduire la relation suivante:
$$\| f \|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_k(f)|^2$$

6. Soit $f, g \in E$. Montrer que si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.