Année universitaire 2015-2016
Licence 1ère année - Mention MI
U.E.F. Ma0102 - Éléments d'algèbre et de géométrie

FEUILLE DE TD N°2

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Exercice 1 :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soit les parties suivantes de E :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{4, 5, 6, 7\} \quad , \quad C = \{1, 3, 5, 7\} \quad , \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

1) Déterminer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$ et $\left(\complement_E A \cap D\right) \cap \complement_E (B \cup C)$

2) a) Est-ce que les ensembles B et D sont disjoints ? sont distincts ?
   b) Même question avec B et C.

Exercice 2 :

On considère les ensembles suivants :

$$A = \Big\{1, 2, 5\Big\} \quad , \quad B = \Big\{\{1, 2\}, 5\Big\} \quad , \quad C = \Big\{\{1, 2, 5\}\Big\} \quad , \quad D = \Big\{0, 1, 2, 5, \emptyset\Big\} \quad , \quad E = \Big\{5, 1, 2\Big\}$$
$$F = \Big\{\{1, 2\}, \{5\}\Big\} \quad , \quad G = \Big\{\{1, 2\}, \{5\}, 5\Big\} \quad , \quad H = \Big\{5, \{1\}, \{2\}\Big\}$$

1) Quelle sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?

2) Déterminer le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles.

3) Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E \setminus G$.

4) Vérifier que $A \subset D$ puis déterminer $\complement_D A$.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble et a, b et c trois éléments de E.

1) Donner les éléments de $\mathscr{P}(\{a\})$, $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\{a, b\})\right)$

2) Même question avec $\mathscr{P}(\emptyset)$ et $\mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\emptyset)\right)$

Exercice 4 :

Soient A et B deux parties quelconques d'un ensemble E.

1) Est-il vrai ou faux que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?

2) Même question pour $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

3) A-t-on : $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) \iff A = B$

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E non vide. En vous aidant d'un diagramme de Venn, répondre aux questions suivantes :

T.S.V.P.

1) Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?

2) Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?

Exercice 6 :

Soit E un ensemble. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$:

1) $A = E \Longleftrightarrow \left[\forall X \in \mathscr{P}(E), A \cup X = E\right]$

2) $A = \emptyset \Longleftrightarrow \left[\forall X \in \mathscr{P}(E), A \cap X = \emptyset\right]$

Exercice 7 :

Soit E un ensemble.

1) Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$

2) Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,

   a) $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap \complement_E C)$

   b) $A \cup \left[B \cap (A \cup C)\right] = A \cup (B \cap C)$

   c) $\left(A \cup B = A \cap C\right) \Longleftrightarrow \left(B \subset A \text{ et } A \subset C\right)$

Exercice 8 :

Soit E un ensemble et A, B, A' et B' des parties de E. Montrer que si $A \subset B$ et $A' \subset B'$ alors $A \cup A' \subset B \cup B'$ et $A \cap A' \subset B \cap B'$

Exercice 9 :

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

1) Montrer que : $\left[\exists X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X = B\right] \Longleftrightarrow B \subset A$

2) On suppose que $B \subset A$. Déterminer toutes les parties X de E pour lesquelles : $A \cap X = B$ (*On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a : $X = X \cap \left(A \cup \complement_E A\right)$*)

Exercice 10 :

Soit E un ensemble. Soient $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

e) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Exercice 11 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

a) $(A\cap B)\cup\big(A\cap(\complement_E B)\cap(\complement_E C)\big)\cup\big(A\cap\complement_E B\cap C\big)$.

b) $\big(A\cup B\cup\complement_E C\big)\cap C\cap\complement_E B$.

Exercice 12 :

Soit E un ensemble non vide.

1) Soient $A,B,C\in\mathscr{P}(E)$. Montrer que :

$$\Big[A\cap C\subset B\cap C \text{ et } A\setminus C\subset B\setminus C\Big]\Longrightarrow A\subset B$$

2) Soient $A,B\in\mathscr{P}(E)$. Montrer que :

$$\Big[\forall X\in\ \mathscr{P}\ (E),\ (A\setminus X)\cup(X\setminus A)=(B\setminus X)\cup(X\setminus B)\Big]\Longleftrightarrow A=B$$

Exercice 13 :

1) Déterminer $A\times B$ où $A=\{1,2,3,4\}$ et $B=\{3,4,5\}$

2) Dessiner les parties suivantes de $E=\mathbb{R}^2$:

$$[-1,1]\times[2,3]\quad,\quad\complement_{\mathbb{R}}([-1,1])\times\complement_{\mathbb{R}}([2,3])\quad,\quad\complement_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\big([-1,1]\times[2,3]\big)\quad,\quad\Big\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ \big|\ a^2+b^2\leqslant 4\Big\}$$

Exercice 14 :

Soient E et F deux ensembles non vides, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

1) Montrer que :

a) $(A\times C)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times C$.

b) $(A\times C)\cup(A\times D)=A\times(C\cup D)$.

2) Comparer $(A\cup B)\times(C\cup D)$ et $(A\times C)\cup(B\times D)$.

3) Démontrer que : $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$

4) Déterminer en fonction de A, D et des complémentaires de A dans E et D dans F, le complémentaire de $A\times D$ dans $E\times F$.

****