Travaux dirigés 2. Familles de vecteurs

Exercice 1

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles, soient les vecteurs :

$$u = (1,1,1) \;\; ; \;\; v = (1,2,3) \;\; ; \;\; w = (3,4,5) \;\; ; \;\; x_1 = (2,-3,4) \;\; ; \;\; x_2 = (2,-3,-8)$$

1. Calculer les combinaisons linéaires $u - v$, $3u - v + 2w$.
2. Est-ce que le vecteur x_1 peut s'écrire comme combinaison linéaire de u, v et w ?
3. (a) Vérifier que le vecteur x_2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de u, v et w. Déterminer toutes les combinaisons linéaires de u, v et w donnant le vecteur x_2.
   (b) Reprendre la question précédente en remplaçant x_2 par le vecteur nul.
4. Soit $x = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) portant sur t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{R}^3$ pour que x soit combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 2

Chercher tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

1. $u = (1,1,2), v = (2,-1,1)$ et $w = (1,-2,-1)$
2. $u = (1,1,1), v = (1,-2,1)$ et $w = (5,1,1)$
3. $u = (1,4,1)$

Les vecteurs recherchés seront écrits sous forme paramétrique ($x = (t_1, t_2, t_3)$), puis on déterminera une CNS portant sur t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les familles de vecteurs $((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $((3,7,0),(5,0,-7))$.

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 4

Les vecteurs des familles suivantes de deux vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

1. $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (2, 1)$, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, puis dans l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^2$.
2. $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, puis dans l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^4$.
3. $v_1 = (1, \sqrt{2})$ et $v_2 = (\sqrt{2}, 2)$, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5

Les familles suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

1. $u = (1, 2, -1), v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, -2, -3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$
4. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 7

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$,

$$u = (0, 3, 1), \quad v = (-1, h, \frac{1}{3}), \quad w = (k, 1, \frac{h}{3}).$$

Déterminer pour quelles valeurs de $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 8

Soit (a, b, c) une famille libre d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{Q}$. Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

$$(a, b), \ (a + b, a - b), \ (a + 2b, 3a - 6b), \ (a + c, b + c, c)$$
$$(3a + 2b + c, a + b - c, -a + c), \ (a - b + c, a + b - c, a - 3b + 3c).$$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille (f, g, h) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $f(t) = \mathrm{e}^t, \ g(t) = \mathrm{e}^{2t}, \quad h(t) = t,$
2. $f(t) = \mathrm{e}^{-t}, \ g(t) = \sin(t), \quad h(t) = 1.$

Exercice 10

On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = x \cos x, \quad f_3(x) = \sin x, \quad f_4(x) = x \sin x.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathcal{F}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.

(Indication: on pourra utiliser les quatre valeurs de x: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).