TD 3

Espaces probabilisés

Calculs de probabilités

Exercice 1 (★)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. A quelle condition a-t-on deux événements A et B à la fois incompatibles et indépendants ?
2. Soient A et B deux événements.
   (a) Montrer que, si $P(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
   (b) Montrer que, si $P(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
3. Soient A, B, C des événements mutuellement indépendants. Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Exercice 2 (★★)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$
2. En déduire que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, on a :
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Exercice 3 (★★)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Montrer que quels que soient les événements A et B :
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$
2. Montrer que quel que soit l'entier $n \geq 1$, quels que soient les événements $A_1, \ldots, A_n$:
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$
3. En déduire qu'une intersection dénombrable d'événements quasi-certains est un événement quasi-certain.

Exercice 4 (★)

Soit m un entier naturel non nul. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire m fois une boule de cette urne, avec remise à chaque fois de la boule tirée. Pour tout entier $1 \leq i \leq 3$, on note B_i l'événement : "la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des m premiers tirages".

1. Calculer $P(B_i)$ et $P(B_i \cap B_j)$ en fonction de m (pour tout $i, j \in [\![1, 3]\!]$, avec $i \neq j$).
2. En déduire la probabilité $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

Exercice 5 (★)

On dispose de trois urnes contenant des boules blanches, rouges et noires : U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires, U_2 contient 1 blanche, 2 rouges et 1 noire, U_3 contient 3 rouges et 1 noire.
On effectue à présent trois tirages successifs selon le protocole suivant :

- on tire une boule dans U_1, on note la couleur, on remet la boule dans U_2,
- on tire une boule dans U_2, on note la couleur, on remet la boule dans U_3,
- on tire une boule dans U_3 et on note la couleur.

Déterminer la probabilité d'avoir un tirage unicolore, bicolore ou tricolore.

Exercice 6 (★)

Une urne contient 4 boules blanches, 2 boules rouges et 1 boule verte. On effectue des tirages sans remise dans l'urne et on s'arrête dès qu'on a obtenu pour la première fois une boule de couleur différente de la précédente.
On note B_k l'événement "tirer une boule blanche au k-ième tirage", R_k l'événement "tirer une boule rouge au k-ième tirage", V_k l'événement "tirer une boule verte au k-ième tirage" et A_k l'événement "le jeu s'arrête au bout de k tirages".

1. Quel est le nombre possible de tirages?
2. Traduire l'événement A_5 à l'aide des événements B_k, R_k et V_k, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et calculer sa probabilité. De même, calculer $P(A_4)$ et $P(A_3)$.
3. En déduire $P(A_2)$.
4. Déterminer la probabilité de l'événement E "le jeu s'arrête au plus au bout de 4 tirages".

Exercice 7 (★★)

On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile est p avec $0 < p < 1$ et on note $q = 1 - p$. On considère l'événement A : "on obtient au moins un pile".

1. Écrire l'événement A de trois manières différentes :
   - avec les A_n : "on obtient le premier pile au n-ième tirage",
   - avec les B_n : "on obtient au moins un pile lors des n premiers tirages",
   - avec les C_n : "on obtient face au n-ième tirage".
2. Proposer alors trois calculs pour déterminer $P(A)$. Comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 8 (★★)

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment un dé équilibré à 6 faces. On note A_n l'événement "on n'a pas obtenu 6 lors des n premiers lancers".

1. Exprimer l'événement A : "on n'obtient jamais 6" en fonction des A_n.
2. En déduire la probabilité de A.
3. Démontrer que l'événement B "obtenir au moins une fois un numéro pair" est un événement presque sûr.

Exercice 9 (★★)

On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0,1[$. Pour tout $n \geq 2$, on note A_n l'événement : "au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile".

1. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que : $P(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que : $P(A_n) = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$.
3. Est-il possible que face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 10 (★★)

On considère une série infinie d'urnes $(U_n)_{n\geq 2}$. Chaque urne contient des boules blanches et des boules noires. L'expérience est la suivante : on tire une boule dans U_2, une boule dans U_3, etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.

1. Soient l'événement A "on ne tire jamais de boule noire" et les événements A_n "les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches".
   (a) Quelle est la particularité de la suite d'événements $(A_n)_{n\geq 2}$?
   (b) Exprimer A en fonction des A_n.
2. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n boules dont une seule noire.
   (a) Calculer $P(A_n)$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.
3. On suppose que pour tout entier $n \geq 2$, l'urne U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$: $P(A_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 11 (★★)

On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce que la somme des numéros obtenus fasse 5 ou 7.

1. On considère les événements A_k "on a obtenu une somme égale à 5 au k-ième double jet", B_k "on a obtenu une somme égale à 7 au k-ième double jet" et C_k "on a obtenu une somme différente de 5 et de 7 au k-ième double jet".

   Déterminer $P(A_k)$, $P(B_k)$ et $P(C_k)$.
2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement E_n "on obtient une somme égale à 5 au n-ième double jet et une somme différente de 5 et de 7 sur les $n-1$ premiers doubles jets".
   (b) En déduire la probabilité de l'événement E : "on s'arrête sur une somme égale à 5".
3. Déterminer la probabilité de l'événement F : "on s'arrête sur une somme égale à 7".
4. Quelle est la probabilité de l'événement T : "le jeu ne s'arrête jamais" ?

Exercice 12 (★★★)

On considère une pièce truqué pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce. A commence. Le premier joueur qui obtient face à gagné la partie.
On note P_k l'événement "la pièce donne pile au k-ième lancer" et F_k l'événement "la pièce donne face au k-ième lancer.

1. (a) Déterminer la probabilité de l'événement G_n : "le joueur A gagne le jeu au n-ième lancer".
   (b) En déduire la probabilité de l'événement G : "le joueur A gagne le jeu".
2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement T_n : "le jeu se termine au n-ième lancer".
   (b) En déduire la probabilité de l'événement T : "le jeu se termine".
3. Déduire des deux questions précédentes la probabilité que B gagne le jeu.

Formule des probabilités totales

Exercice 13 (★)

Jean-Louis prend chaque jour le bus ou le métro pour se rendre au travail. Le trajet en métro est moins direct, mais le bus n'est pas fiable. La probabilité pour que le bus soit en retard de plus de 7 minutes un jour donné est de 1/3.
Jean-Louis agit ainsi :

- Le premier jour, il prend le bus.
- Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro. Sinon, il prend de nouveau le bus.
- Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement A_n : "Jean-Louis prend le bus le jour n".

1. Écrire avec des notations mathématiques, les probabilités données par l'énoncé.
2. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :
$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}.$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 14 (★★)

Deux bourses U et V contiennent respectivement deux pièces d'or et trois d'argent, quatre d'or et une d'argent. On tire une pièce de l'une des bourses choisie au hasard et on la remet dans cette même bourse. Si la pièce tirée est en or, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans la même bourse. Dans le cas contraire, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans l'autre bourse. On applique cette règle à chaque tirage à partir du deuxième tirage.

1. Déterminer les probabilités pour que :
   (a) les trois premiers tirages soient faits dans la bourse U;
   (b) le deuxième tirage se fasse dans la bourse U;
   (c) on tire une pièce d'argent au deuxième tirage;
   (d) le deuxième tirage ait été fait dans la bourse U sachant que l'on a tiré une pièce d'or à ce deuxième tirage.
2. Soit n un entier naturel et non nul. On note u_n la probabilité de l'événement U_n : "le n-ième tirage s'effectue dans la bourse U".
   (a) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir de l'or au tirage numéro n.

Exercice 15 (★★★)
Une boite A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boite B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$.
Pour cela, on introduit les évènements :

- P_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0",
- Q_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1",
- R_n : "la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2".

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

1. Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2.
2. Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+2} = \dfrac{1}{2}q_{n+1} + \dfrac{1}{2}q_n$.
4. En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de r_n.
5. Déterminer les limites des trois suites.

Exercice 16 (★★)
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 17 (★★★)
Un joueur effectue une série de manches indépendantes. A chaque manche, il gagne 1 euro avec la probabilité p et il perd 1 euro avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose $p \neq q$.
Le jeu s'arrête soit quand le joueur est ruiné, soit quand il a accumulé une somme de N euros (N étant un entier naturel fixé avant le début du jeu).
On note r_k la probabilité de l'événement R_k : "le joueur parvient à la ruine en ayant commencé à jouer avec un capital initial de k euros".

1. Calculer r_0 et r_N.
2. En considérant les issues possibles de la première manche et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que : $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $r_k = pr_{k+1} + qr_{k-1}$.
3. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $r_k = \dfrac{(\frac{q}{p})^k - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}$.

Exercice 18 (★★)

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à l'instant n, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Lorsqu'il est vert à l'instant n, il passe au rouge à l'instant suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
On note R_n (resp. V_n) l'événement : "le feu est rouge (resp. vert) à l'instant n".
On pose $r_n = P(R_n)$ et $v_n = P(V_n)$ et X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & v_n \end{pmatrix}$

1. Établir les relations de récurrence liant r_{n+1} et v_{n+1} à r_n et v_n.
2. Déterminer $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $X_{n+1} = X_n A$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 A^n$.
4. Déterminer deux matrices B et C telles que :
$$\begin{cases} B + C & = & I_2 \\ B - \dfrac{1}{6}C & = & A \end{cases}$$
5. Calculer B^2, C^2, BC et CB.
6. Calculer A^n. En déduire r_n et v_n, puis leur limites respectives.

Exercice 19 (★★)

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \dfrac{1}{4}A$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier que A est diagonalisable et déterminer deux matrices P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On dispose de trois urnes de trois couleurs différentes contenant chacune quatre boules : une urne blanche qui contient trois boules blanches et une boule verte, une urne rouge qui contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte et une urne verte contient une boule blanche et trois boules vertes.

   On effectue alors une suite de tirages selon les règles suivantes :

   - Après chaque tirage dans une urne, la boule tirée est remise dans la même urne.
   - Le premier tirage a lieu dans l'une des trois urnes prises au hasard.
   - Pour tout entier naturel non nul n, le $(n+1)$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée lors du n-ième tirage.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement "le n-ième tirage a lieu dans l'urne blanche (respectivement rouge, verte)" et on note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} P(B_n) & P(R_n) & P(V_n) \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(B_{n+1})$, $P(R_{n+1})$, $P(V_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$, $P(R_n)$, $P(V_n)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_{n+1} = X_n B$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = X_1 B^{n-1}$.
   (d) En déduire les expressions de $P(B_n)$, $P(R_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(R_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(V_n)$.

Exercice 20 (★★)

Une urne contient une boule noire. Un joueur lance un dé équilibré :

- s'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne et le jeu s'arrête.
- sinon, il ajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation.

On note pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'événement "on obtient pour la première fois un six au n-ième lancer". De plus, on note N l'événement "la boule tirée est noire".

1. Montrer que $(A_n)_{n\geq 1}$ est un système presque complet d'événements.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $P(N)$.

   On pourra utiliser la formule : $\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice 21 (★★)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 est composée de 3 boules blanches et 1 boule noire et U_2 est composée de 3 boules noires et 1 boule blanche.

On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité de faire face est égale à $\frac{2}{3}$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois face et :

- si le nombre de lancer nécessaire à l'obtention du premier face est impair alors on tire une boule dans l'urne U_1.
- si le nombre de lancer nécessaire à l'obtention du premier face est pair alors on tire une boule dans l'urne U_2.

On note pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'événement "on obtient pour la première fois un face au n-ième lancer". De plus, on note B l'événement "la boule tirée est blanche".

1. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est un système presque complet d'événements.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $P(B)$.
