TD3

Matrices

On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappels de cours

- Définition de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique et dimension de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Définition du produit matriciel : bilinéaire et associatif. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau (non-commutatif). Transposée d'une matrice. Transposée du produit.

- Définition d'une matrice inversible. Inverse du produit. Transposée de l'inverse.

  Savoir faire : Comment montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse?

- Liens matrices - applications linéaires. Changements de bases.

- Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Définition du noyau de M, de l'image de M et du rang de M. Liens avec les applications linéaires. Théorème du rang pour les matrices. Rang de la transposée.

  Savoir faire : Comment déterminer le noyau, l'image et le rang d'une matrice?

- Matrices semblables et matrices équivalentes.

Anthony Mansuy
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr` - E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Calcul matriciel

Exercice 1

1. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Même question avec les matrices commutant avec toutes celles de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2

Soient $D = diag(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & DM - MD. \end{array}$.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme φ.
2. Préciser ces espaces quand les coefficients a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 3

Soit $M = (m_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée de taille n.

1. Quelle est la condition sur les coefficients $m_{i,j}$ pour que M soit triangulaire supérieure ?
2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4

On donne dans cette exercice plusieurs méthodes pour calculer les puissances d'une matrice.

1. Conjecturer une formule sur les puissances des matrices suivantes puis la démontrer :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer A en fonction de I_3 et de B.
   (b) A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer A^n en fonction de n.
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^2 + A - 2I_3 = 0$.
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$.
   (c) En déduire A^n en fonction de n.
4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
   (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$.
   (c) Expliciter a_n puis b_n en fonction de n.

(d) En déduire une expression A^n en fonction de n.

5. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.

   (c) En déduire une formule donnant A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

1. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour chacune des matrices suivantes, vérifier que l'on a bien l'égalité demandée et en déduire si elle est inversible. Donner alors son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A^3 - 4A^2 - 6A - I_3 = 0. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B^2 - 2B = 0.$$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que : $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$.

2. Donner une CNS pour que A soit inversible.

3. Déterminer dans ce cas A^{-1}.

Exercice 7

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont symétriques (resp. anti-symétriques).

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Donner l'expression de la projection vectorielle sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Donner l'expression de la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application trace $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. (a) L'application Tr est-elle linéaire ? Est-elle surjective ? Déterminer une base de $Ker(Tr)$.

   (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A-t-on $Tr(AB) = Tr(A)Tr(B)$? $Tr(AB) = Tr(BA)$?

   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0 \iff A = 0$.

2. On va montrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star, \quad A \mapsto \big(M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)\big) \ .$$

   (a) Rappeler quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$ (l'espace dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\phi(A)$ est bien un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$.
   (c) Montrer que ϕ est linéaire.
   (d) Soit $\{E_{ij} \mid i,j = 1,\dots,n\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Pour $i,j = 1,\dots,n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{Tr}(AE_{ij})$.
   (e) Montrer que ϕ est injective.
   (f) Conclure.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 9
Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} u_1 : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P(1) \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} u_3 : & \mathbb{C}_3[X] & \to & \mathbb{C}_3[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} u_2 : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{array}, \qquad \begin{array}{rrcl} u_4 : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \mapsto & P + P' \end{array}.$$

Exercice 10
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM. \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme et donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 11

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer à quel endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ la matrice M est associée dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. En déduire que $M^{n+1} = 0$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \dots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \ddots & C_n^1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_n^n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer à quel endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ la matrice M est associée dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

Exercice 12
Soit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Considérons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$

1. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$. On note $V(a_0, ..., a_n)$ cette matrice.

2. Montrer que $V(a_0, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 13
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
2. Démontrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-1,-1)$ et $u_3 = (-3,3,0)$. Prouver que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$. Écrire la matrice de f dans cette base.
4. Écrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

Exercice 14
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer f^2. En déduire que $Im(f) \subset Ker(f)$.

b) Donner rgf et $\dim(Kerf)$ puis déterminer une base du noyau et de l'image de f.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Changement de base

Exercice 15
Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3. Posons $x = (2,-1,3,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 16
On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3. Soit u l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 17
Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x+y-z=0$ parallèlement à la droite $Vect(1,1,1)$.

Exercice 18

On note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ u(x,y) = (3x+4y, -x+y, 2x-2y)$$

1. Soit $e_1' = (3,1)$, $e_2' = (-2,5)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
2. Soit $f_1' = (-1,0,1)$, $f_2' = (2,-1,2)$, $f_3' = (1,-1,1)$ et $\mathcal{C}' = (f_1', f_2', f_3')$
   (a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner les matrices de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Exercice 19

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ associé.

1. Montrer que $Ker(u - id_E)$, $Ker(u - 2id_E)$ et $Ker(u + 4id_E)$ sont de dimension 1 et en donner des bases.
2. On se donne e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de chacun des noyaux précédents. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
3. Donner la matrice D de u dans cette base.
4. Justifier qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ (que l'on explicitera) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 20

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
2. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Rang d'une matrice

Exercice 21

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = 0_3$.
Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 23
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les rangs de A et B.
2. Calculer BA en observant que $(AB)^2 = AB$.

Exercice 24
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
2. Préciser son noyau et son image.
3. Calculer M^n.

Matrices équivalentes et matrices semblables

Exercice 25 (Matrices équivalentes)
Soient n et p des entiers naturels non nuls. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on rappelle que la matrice A est équivalente à la matrice B, et on note $A \sim B$, s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A = Q^{-1}AP$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r. Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F telles que :
$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{p-r,r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$
3. En déduire que : $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(B)$.

Exercice 26 (Matrices semblables)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B, et on note $A \approx B$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

1. Si A est la matrice représentative d'un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$, à quelle condition (nécessaire et suffisante) a-t-on $A \approx B$?
2. Montrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Quelle est la classe d'équivalence de la matrice λI_n pour la relation $\approx$?
4. Montrer que si $A \approx B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \approx B^k$.
5. Soient A et B telles que $A \approx B$. Montrer que A est inversible si et seulement si B est inversible, et qu'alors $A^{-1} \approx B^{-1}$.
6. Montrer que si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes.

   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 27
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

Établir que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 28
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

Établir que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 30
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application trace $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \to \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrer que si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont même trace.
2. Montrer que l'on peut définir sans ambiguïté la trace d'un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie comme étant la trace de sa matrice représentative dans une base (quelconque) de E.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, s \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $s^2 = Id_E$. Calculer $Tr(p)$ et $Tr(s)$.