TD3

Analyse asymptotique

Rappels de cours

- Comparaisons des suites numériques (négligeabilité, domination). Opérations sur les comparaisons et comparaisons usuelles.
- Équivalences des suites numériques. Définition et propriétés. Opérations sur les équivalents. Formule de Stirling.
- Comparaisons des fonctions numériques. Négligeabilité et domination. Comparaisons usuelles en $+\infty$, en 0^+.
- Équivalences des fonctions numériques. Définition et propriétés.
- Développements limités. Définition, unicité du développement limité s'il existe. Formule de Taylor-Young. Calcul de développements limités. Intégration des développements limités.
- Applications des développements limités : prolongement d'une fonction, étude locale et asymptotique d'une fonction.

Anthony Mansuy
Page personnelle : `http://anthony-mansuy.fr` - E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Études asymptotiques de suites numériques

Exercice 1

Déterminer des équivalents simples quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(a) $\ln(n) + 2n - 1$ (b) $\dfrac{(1+\ln(n))(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}}$ (c) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

(d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ (e) $\ln(2n^3+1)$ (f) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(g) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (h) $\ln(n+1) - \ln(n-1)$ (i) $(n+1)^n$

Exercice 2

Calculer les limites quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(a) $n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{27} - 1\right)$ (b) $(n+1)(n^{1/n} - 1)$ (c) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Calculer les développements asymptotiques des suites dont les termes généraux suivent :

(a) $\sqrt{n^2+1}$ à 3 termes (b) $\sqrt[n]{n}$ à 3 termes (c) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ à 3 termes.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 5

Soit des réels positifs a et b. Trouver la limite quand n tend vers l'infini de :

$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n.$$

Exercice 6

Soit $r > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer la limite de la suite complexe (z_n) définie par

$$z_0 = re^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n.$$

1. Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.
2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite (x_n).

3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n).

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul et (E_n) l'équation : $x^n \ln(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n et que $x_n > 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et déterminer sa limite.
3. On pose $y_n = x_n - 1$. Justifier que $ny_n \sim -\ln(y_n)$ et en déduire un équivalent de y_n.

Études asymptotiques de fonctions numériques

Exercice 9

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

(a) $(x+1)e^{x+1}$ (b) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ (c) $(x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$

Exercice 10

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0^+$:

(a) $\sqrt{x} - x + 2x^{3/2}$ (b) $\dfrac{2\ln(x) + \sqrt{x}}{\frac{1}{x} - 2\ln(x)}$ (c) $\ln(\sin(x))$

Exercice 11

Calculer les développements limités suivants :

(a) $\dfrac{e^x}{x}$ à l'ordre 2 en 1

(b) $\ln(1+e^x)$ à l'ordre 3 en 0

(c) $\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0

(d) $\sqrt{3+ch(x)}$ à l'ordre 3 en 0

(e) $\sin(x)e^x$ à l'ordre 2 en 0

(f) $\dfrac{sh(x)}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 en 0

Exercice 12

Calculer les trois premiers termes des développements asymptotiques de :

(a) $\dfrac{1}{e^x - 1}$ quand $x \to 0$

(b) $\ln(x+1)$ quand $x \to +\infty$

Exercice 13

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(3.2^{1/x} - 2.3^{1/x}\right)^x$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x \ln(x)}}{x^x - 1}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1\right)\ln(x)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{1/x}$

Exercice 14
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Quelle est l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?

Exercice 15
1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \arctan(e^x)$.
2. Quelle est l'allure de cette fonction autour du point d'abscisse 0 ?

Exercice 16
1. Former le développement asymptotique à l'ordre 3 en $+\infty$ de $x \mapsto x \arctan(x)$.
2. Quelle est l'allure de cette fonction en $+\infty$?

Exercice 17
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée de f admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercice 18
1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2. Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant

$$\tan(\arctan(x)) = x.$$

3. Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Exercice 19
On pose $f(x) = x + \ln(x) - 1$ pour $x > 0$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
2. Former le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0.
3. Donner un équivalent simple de $f^{-1}(y)$ quand $y \to +\infty$.

4. Donner un équivalent simple de $f^{-1}(y)$ quand $y \to -\infty$.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire de classe C^∞.

2. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Exercice 21

Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Exercice 22

Montrer les égalités suivantes :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad \ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 23

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.
On pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+^*, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

2. En déduire que : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x-y)f(x+y) \leq (f(x))^2$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f''(x) \leq f'(x)$.

Exercice 25

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que $f(x), f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
