

EXERCICES DU CHAPITRE 3 PRIMITIVES

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes. On précisera sur quel intervalle chacune de ces primitives est définie.

$$\begin{array}{llll} (a) & x^4 + \frac{1}{x^3} - \sqrt{2x+1} & (b) & \frac{2}{(4x+5)^3} \\ (c) & \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 & (d) & x^2(1 - \sqrt[3]{x}) \\ (e) & 3x\sqrt{1+x^2} & (f) & \frac{1}{1+9x^2} \\ (g) & \frac{1}{1-3x^2} & (h) & \frac{x}{1-3x^2} \\ (i) & \sin(2x) + \cos(3x) & (j) & \sin(2x)\cos(3x) \\ (k) & \sin(x)\cos^3(x) & (l) & x\operatorname{sh}(3x^2) \\ (m) & \operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}(5x) & (n) & \tan(x) \\ (o) & \tan^2(x) & (p) & \frac{x}{1+x^4} \\ (q) & \sin^3(x) & & \end{array}$$

Exercice 2 En utilisant une ou plusieurs intégrations par parties, déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes. Précisez sur quel domaine la fonction et ses primitives sont définies.

$$\begin{array}{llll} (a) & \ln(x) & (b) & x^2 \ln(x) \\ (c) & \ln(x^2+1) & (d) & \frac{\ln(x)}{x^2} \\ (e) & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & (f) & \cos x \ln(1 + \cos x) \\ (g) & \arctan(x) & (h) & x \arctan(x) \\ (i) & xe^{3x} & (j) & x^2e^{2x} \\ (k) & (x^2+x+1)e^x & (l) & e^{4x} \sin(x) \\ (m) & e^{2x} \cos(x) & (n) & \frac{x}{\cos^2 x} \\ (o) & x^3 \cos(x) & (p) & (x^2-1) \sin(x) \\ (q) & x^2 \cos(x) + xe^{3x} & & \end{array}$$

Pour les primitives du type $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, on pourra intégrer par parties deux fois. Cela donnera une égalité où l'intégrale cherchée figurera à droite et à gauche du signe =, mais avec un coefficient différent.

Exercice 3 Soient P et Q des polynômes, soit a un nombre réel. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto P(x)e^{ax}$.
2. $x \mapsto P(x) \cos(ax) + Q(x) \sin(ax)$.
3. Sous quelle forme peut-on, heuristiquement, chercher une primitive des fonctions $x \mapsto x^n e^{ax}, x^n \cos(ax), x^n \sin(ax)$?
4. Utiliser cette constatation pour recalculer les primitives des fonctions

$$x \mapsto xe^{3x}, x^2 e^{2x}, (x^2 + x + 1)e^x, x^3 \cos(x), (x^2 - 1) \sin(x), x^2 \cos(x) + xe^{3x}.$$

Exercice 4 En utilisant un ou plusieurs changements de variables, déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes.

- | | | | | |
|---------------------------------|--|---|---|---------------------------------|
| (a) $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ | (b) $\frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$ | (c) $\frac{\ln(x)}{x}$ | (d) $\frac{(\ln(x))^p}{x}$ | |
| (e) $\frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ | (f) $\frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}$ | (g) $\frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ | (h) $\frac{1}{3x^2 + 1}$ | (i) $\frac{1}{(x + 1)\sqrt{x}}$ |
| (j) $\frac{1}{x\sqrt{2x - 1}}$ | (k) $\frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 4}$ | (l) $\frac{e^x \operatorname{sh}(e^x)}{1 + \operatorname{ch}^2(e^x)}$ | (m) $\frac{e^x}{(3 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}$ | (n) $\frac{1}{x^2 + x + 1}$ |
| (o) $\frac{1}{x^2 + 6x + 25}$ | (p) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{9 - \sin^2(x)}}$ | | | |

Exercice 5 Polynômes à coefficients réels.

1. Exprimer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$).

(a) $P_1(x) = x^2 - 3x + 2$	(b) $P_2(x) = x^2 + x + 2$	(c) $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
(d) $P_4 = x^4 - 1$	(e) $P_5 = x^6 - 1$	(f) $P_6 = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
(g) $P_7 = x^4 + 2x^3 + x^2$		

2. Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B dans les cas suivants.

- (a) $A(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3, B(x) = x^2 - 1$;
- (b) $A(x) = x^3 - 2x, B(x) = x + 1$;
- (c) $A(x) = x + 1, B(x) = x^3 - x^2 + x + 2$;
- (d) $A(x) = x^3 - 2, B(x) = x^3 - x^2$;
- (e) $A(x) = x^5 + 2, B(x) = x^5 - x$;

Exercice 6 Fonctions rationnelles

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes. On NE demande PAS de déterminer les coefficients.

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{x+6}{x(x-5)^4(x+6)^2} & (b) \frac{1}{x(x+1)(x^2+2x+1)^2} \\ (c) \frac{1}{(x-2)^2(x+1)^6} & (d) \frac{(x-1)}{(x-2)^2(x^2-1)(x^2+2x+5)^3} \\ (e) \frac{x^5+2x^3-x^2+x+7}{x^2(x-1)^4(x^2+1)^3(x^2+x+1)} & (f) \frac{2x^5+x^4-x^2+x-3}{x^2(x+1)(x^2-1)^2} \\ (g) \frac{-x^8+2}{x(x-\pi)(x^2+1)} & \end{array}$$

2. Décomposer les fractions rationnelles $f : x \mapsto f(x)$ suivantes en éléments simples puis les intégrer, en précisant sur quel intervalle c'est possible.

$$\begin{array}{llll} (a) \frac{x^3-2x}{x+1} & (b) \frac{x^3-2}{x^3-x^2} & (c) \frac{x^5+2}{x^5-x} & (d) \frac{1}{x^2-3x+2} \\ (e) \frac{1}{x^3+1} & (f) \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} & (g) \frac{7x-2}{x(x^2+x-6)} & (h) \frac{1}{x(x-1)^2} \\ (i) \frac{x^2+1}{(x-1)^3} & (j) \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} & & \end{array}$$

Exercice 7 Fonctions en sin, cos, sh, ch

Déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes

$$\begin{array}{llll} (a) \sin^3 x \cos^3 x & (b) \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} & (c) \frac{\cos(x)}{\cos(2x)} & (d) \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} & (e) \frac{\cos x}{2+\sin^2 x} \\ (f) \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} & (g) \frac{1}{1+\tan x} & (h) \frac{1}{2+\cos x} & (i) \frac{1+\tan x}{1+\sin^2 x} & (j) \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ (k) \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch}^3 x} & (l) \frac{1}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x} & & & \end{array}$$

Exercice 8 Calculer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes

$$\begin{array}{ll} (a) \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) & (b) \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}} \\ (c) \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} & (d) \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ (e) \frac{1+\sqrt{x}}{(1+2\sqrt{x})\sqrt{x}} & \end{array}$$

Exercice 9

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle f donnée par :

$$f(x) = \frac{4}{(1 - 2x + x^2)(1 + x^2)}.$$

2. En déduire

$$\int f(x) dx,$$

en précisant un intervalle sur lequel le calcul est possible.

3. En déduire (au moyen d'un changement de variable)

$$\int \frac{1 + \cos(u)}{1 - \sin(u)} du,$$

Exercice 10

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle f donnée par :

$$f(x) = \frac{7(x^2 + x - 1)}{(x^2 + x - 6)(x^2 + x + 1)}.$$

2. En déduire

$$\int f(x) dx,$$

en précisant un intervalle sur lequel le calcul est possible.

Exercice 11 Calculer

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx ,$$

en faisant un changement de variable approprié.

Exercice 12 Déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ suivantes

$$(a) \frac{x^2}{1+x^2} \arctan(x) \quad (b) \frac{1}{(e^x+2)^2} \quad (c) \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{sh}^8 x} \quad (d) \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}} \quad (e) \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

$$(f) \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \quad (g) \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} \quad (h) \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}} \quad (i) \ln(1+x^2)$$