Feuille 3.- Séries entières.

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$, où a_n est donné par

$$a_n = n, \quad a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad a_n = \frac{n^n}{n!} \quad a_n = \frac{1}{\operatorname{ch} n} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$a_n = \frac{1}{\ln n} \quad (n \geq 2) \quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{n!}{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \quad (\lambda > 0)$$

Exercice 2

On pose $a_n = \dfrac{n!}{3^n n^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. En déduire (en justifiant proprement) celui de la série entière $\sum a_n x^{3n}$.

Exercice 3

Pour tout $R > 0$, donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est égal à R.

Exercice 4

Cas où la règle de d'Alembert ne s'applique pas directement.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes (pour les deux dernières, on admettra que, si $\theta \in]0, 2\pi[$, les suites *cos* $n\theta$ et *sin* $n\theta$ ne tendent pas vers 0)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n}\, x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n\, x^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\cos n\theta}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\sin n\theta}{n} \qquad (\theta \in]0, 2\pi[)$$

Exercice 5

Rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$, où a_n est le n^{me} chiffre du développement décimal de π. Même question, si a_n est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que la suite $\frac{a_{n+2}}{a_n}$ ait une limite $K > 0$ quand n tend vers $+\infty$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$?

Exercice 7

Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que la suite $\frac{a_{2p+1}}{a_{2p}}$ ait une limite $\lambda > 0$ quand p tend vers $+\infty$, et telle que la suite $\frac{a_{2p+2}}{a_{2p+1}}$ ait une limite $\mu > 0$ quand p tend vers $+\infty$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$?

Exercice 8

Étude au bord du disque de convergence.

Si R est le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes (il a été trouvé dans l'exercice 1), étudier la convergence de la série $\sum a_n x^n$ pour tout nombre complexe x tel que $|x| = R$

$$a_n = n, \qquad a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 9

Soit $a_n = \frac{n!}{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n)}$ $(\lambda > 0)$. Calculer $b_n = \big(\ln(n^\lambda a_n) - \ln((n-1)^\lambda a_{n-1})\big)$ $(n \geq 2)$. A l'aide d'un développement limité, montrer que la série numérique $\sum b_n$ converge. En déduire que la **suite** $n^\lambda a_n$ a une limite $K > 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 10

Soit a un réel. Soit (E) l'équation

$$xu''(x) + 3xu'(x) + 3u(x) = a.$$

Supposons qu'il existe une solution $u = \sum_0^\infty u_n x^n$ de (E) (u_n étant un réel), développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence R non nul.

1. En remplaçant u par $\sum_0^\infty u_n x^n$ dans l'équation (E) et en identifiant terme à terme, trouver
   (a) la valeur de u_0
   (b) une relation entre u_{n+1} et u_n pour $n \geq 1$.
2. Calculer u_n en fonction de u_1 et n pour $n \geq 1$. En déduire le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.
3. Déterminer la fonction u : on reconnaîtra un développement en série entière usuel.

Exercice 11

Fractions rationnelles.

Développer en série entière les fonctions suivantes. Quels sont les rayons de convergence des séries obtenues ?

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \qquad f(x) \;=\; \frac{1}{1+x+x^2} \qquad f(x) \;=\; \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$$

$$f(x) \;=\; \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \qquad f(x) \;=\; \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Exercice 12

Rayon de convergence et somme des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\ x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2\ x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^3\ x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exercice 13

Rayons de convergence et sommes des séries suivantes.

$$f_0(x) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!} \qquad f_1(x) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!} \qquad f_2(x) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!}$$

On calculera certaines combinaisons linéaires de ces fonctions.

Exercice 14

Exemple d'une fonction qui n'est pas développable en série entière.

On pose

$$f(x) \;=\; e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \qquad f(0) \;=\; 0.$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et que, pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que
$$f^{(n)}(x) \;=\; \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$
2. En déduire que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.
3. En déduire que f n'est développable en série entière (de la forme $\sum a_n x^n$) sur aucun intervalle de la forme $]-a, a[$.

Exercice 15

Une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière.

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $]-a, a[$ $(a > 0)$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f^{(n)}(x)| \;\leq\; M^{n+1}\, n! \qquad \forall x \in]-a, a[.$$

1. Montrer que, pour tout entier n

$$\left| f(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq M^{n+2} |x|^{n+1} \qquad \forall x \in]-a, a[$$

2. En déduire que, si $|x| < inf(a, M^{-1})$, on a

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 16

Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-5}{n(n+1)} x^{n+1}$. On notera g sa somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. La somme converge-t-elle pour $x = 1$, $x = -1$?
3. Sur quel domaine peut-on dériver g ? Citer avec précision le résultat du cours qui justifie cette opération.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$. En déduire g' puis g.
5. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-5}{n(n+1)} x^{n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-5}{n(n+1)}$.

Exercice 17

Soit $(a_n)_{(n\geq 1)}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Démontrer que, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$ et que :

$$g(x) \sim \frac{1}{1-x}$$

Exercice 18

On pose, pour tout $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Quel est le rayon de convergence de la série du membre de droite ? Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Montrer que le rayon de convergence de la série du membre de droite est ≥ 1.

b) On admettra, ou bien, éventuellement, on démontrera, que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$$

En se servant aussi de l'exercice précédent, démontrer que, quand $x \to 1_-$,

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

Exercice 19

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-1,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$f^{(2n)}(x) \;\geq\; 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \in]-1,1[.$$

On veut montrer qu'alors f est développable en série entière autour de 0. On considère les fonctions

$$g \;:\; x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \quad h \;:\; x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

définies sur $]-1,1[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n)}$ est positive sur $[0,1[$. En déduire que $g^{(n)}$ est positive sur $[0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $\phi_n \;:\mapsto \frac{1}{x^{2n+1}}\left[g(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}\right]$, $x \in]0,1[$. Montrer que ϕ_n est croissante et positive sur $]0,1[$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous x et a tels que $0 \;\leq\; x \;<\; a \;<\; 1$, on a :

$$0 \leq g(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} g(a).$$

(c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k.$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $|h^{(2n)}(x)| \leq g^{(2n)}(x)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\left| h(x) \; - \; \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq g(x) \; - \; \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

   (c) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.