TD

Espaces affines euclidiens: Paramétrages et équations dans l'espace

On se place dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1

1. Déterminer une équation du plan contenant $\mathcal{D}_1$ et parallèle à $\mathcal{D}'_1$ avec :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}'_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ sont sécantes, avec :

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3z \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}'_2 : \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

   (b) Donner une équation du plan contenant $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$.

Exercice 2

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la sphère $\mathcal{S}(O, 1)$ avec la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1, 1, 1)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 2, 1)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution de rayon 2 et d'axe $\mathcal{D} = O + Vect(\vec{u})$ avec $\vec{u} = (1, 2, 1)$

Exercice 3 On considère dans un repère orthonormé une droite non horizontale $\mathcal{D}$ ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ $(a, b, c \neq 0)$ et passant par un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$.

1. A quelle condition cette coupe-t-elle la droite (Oz)?
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ obtenue par rotation de $\mathcal{D}$ autour de (Oz) en distinguant les cas où $\mathcal{D}$ coupe ou non (Oz).

Exercice 4 On considère la droite $\mathcal{D}$ d'intersection des plans non parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

$$P : \; ux + vy + wz + h = 0 \qquad \text{et } P' : \; u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

Déterminer tous les plans contenant $\mathcal{D}$.

Exercice 5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations :

- $\mathcal{P}_1 : \; \lambda x + y + z + 1 = 0;$
- $\mathcal{P}_2 : \; x + \lambda y + z + \lambda = 0;$
- $\mathcal{P}_3 : \; x + y + \lambda z + 1 = 0.$

Déterminer selon λ la nature de l'intersection des ces trois plans.
Dans le cas où cette intersection est une droite, donner une représentation paramétrique de cette droite.

Exercice 6 Déterminer les équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux deux droites :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} 2x - 4y + z - 1 = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 7

1. Soient deux droites non parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Déterminer une équation de l'ensemble des points M équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a, b, c)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A'(c, b, a)$ et dirigée par $\overrightarrow{u'} = (2, 1, 2)$. A quelle condition sur a, b, c ces deux droites sont-elles coplanaires? Donner alors une équation de leur plan commun.

Exercice 8

1. Soient $A(0, 0, 3)$ et $B(2, 2, 2)$. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}_1$ de diamètre AB.
2. Soient $\mathcal{S}_2$ la sphère de centre $\Omega(1, 3, 0)$ et passant par $A(-1, 1, 2)$.
   (a) Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}_2$.
   (b) Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}_2$ en A.
3. Soient $\mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$.
   (a) Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère $\mathcal{S}_3$.
   (b) Montrer que le plan $\mathcal{P} : 2x + 2y - z - 7 = 0$ est tangent à $\mathcal{S}_3$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 9 Soient le point $A(1, 2, 1)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}(1, 1, -2)$, $\overrightarrow{u_2}(1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{u_3}(3, 0, 2)$. On note :

- $\mathcal{P}_1$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u_1}$;
- $\mathcal{P}_2$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$;
- $\mathcal{P}_1'$ le plan d'équation $2x + y + z + 1 = 0$;
- $\mathcal{P}_2'$ le plan d'équation $x - y - z - 4 = 0$.

Soient $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{P}_1' \cap \mathcal{P}_2'$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des droites. Donner un point et un vecteur directeur pour chacune de ces droites.
2. Soient Π le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ en A et Π' le plan orthogonal à $\mathcal{D}'$ en $A'(1, -1, -2)$.
   (a) Déterminer une équation de Π.
   (b) Déterminer une équation de Π'.
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de $\Delta = \Pi \cap \Pi'$.
3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère tangente à $\mathcal{D}$ en A et à $\mathcal{D}'$ en A'. On note Ω son centre et R son rayon.
   (a) Montrer que $\Omega \in \Pi$.
   (b) Déterminer les coordonnées de Ω.
   (c) Déterminer R.