Université de Reims Champagne-Ardenne — **2016/2017**
Licence MI 1ère année — **Ma0102**

TD3 : Applications

Exercice 1 :

Soient $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{\sqrt{2}, \pi\}$. Donner toutes les applications possibles de E vers F et de F vers E.

Exercice 2 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 3 :

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (3x-7, 9x+5) \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x-2y \end{array},$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 4x-5y) \end{array}, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, x+4y-z) \end{array}.$$

Déterminer tous les couples $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ tels que $f_i \circ f_j$ soit définie. Puis, pour chacun de ces couples, décrire l'application $f_i \circ f_j$.

Exercice 4 :

1. Soient $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2\}$. Quel est le nombre d'applications de E vers F ? Même question pour les applications injectives, pour les applications surjectives, et pour les applications bijectives.
2. Soit $m \geq 3$. Mêmes questions pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, ..., m\}$ (donner les réponses en fonction de m).

Exercice 5 :

Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, ou bijectives ?

$$\begin{array}{c} f_1 : \{0,1,2\} \to \{1,8,-1\} \\ \text{t.q. } f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 8 \text{ et } f_1(2) = -1 \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3 \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array},$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^- \\ x & \mapsto & x^2 \end{array},$$

$$f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}, \quad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}, \quad f_{10} : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}, \quad f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array},$$

$$f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}, \quad f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array}, \quad f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}.$$

Exercice 6 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x^2 - 4x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

1. Trouver une application affine $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ telle que $f = g \circ h$.
2. Trouver une application affine $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cx + d$ telle que $g = f \circ k$.
3. Vérifier que $k = h^{-1}$.

Exercice 7 :

Soit l'application $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$.

1. Est-ce que f est injective ? surjective ?
2. Déterminer un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et un sous-ensemble B de $\mathbb{C}$ tels que l'application $g \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ soit bijective.

Exercice 8 :

On considère les applications f, g et h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(n) = n+1 \ , \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Justifier que g et h sont effectivement des applications.
2. Les applications f, g, h sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Si bijective, donner l'application réciproque.

Exercice 9 :

On considère un plan et deux droites dans ce plan D_1 et D_2 concourantes en un point O (faire un dessin). On note E l'ensemble des points du plan. Soit f_1 l'application de E dans E donnée par la projection sur D_1 parallèlement à D_2, et soit f_2 l'application de E dans E donnée par la projection sur D_2 parallèlement à D_1.

1. L'application f_1 est-elle injective ? surjective ?
2. Décrire les applications $f_1 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$.

Exercice 10 :

On considère un plan $\mathcal{P}$ et O un point de ce plan. On note E l'ensemble des droites du plan. A tout point M de $\mathcal{P}$ distinct de O, on associe la droite (OM). On définit ainsi une application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\backslash\{O\} & \to & E \\ M & \mapsto & (OM) \end{array} .$$

1. Prouver que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Modifier l'ensemble d'arrivée de f pour obtenir une application surjective.
3. Modifier l'ensemble de départ de f pour obtenir une application injective.

Exercice 11 :

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x/(1+x^2) \end{array} .$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $\mathrm{Im} f = [-1, 1]$.
3. Montrer que l'application $g : [-1, 1] \to [-1, 1]\, ,\, x \mapsto 2x/(1+x^2)$ est une bijection.

Exercice 12 : Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} .$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une application $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
3. g est-elle l'aplication réciproque de f ?

Exercice 13 :

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une application $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\backslash\{2\}}$. Existe-t-il une unique application g comme ceci ?
3. g est-elle l'aplication réciproque de f ?

Exercice 14 :

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x+3y) \end{array}.$$

Montrer que f est bijective en déterminant f^{-1}.

Exercice 15 :

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y^2 \end{array}.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Existe-t-il une unique application g comme ceci ?
3. g est-elle l'aplication réciproque de f ?

Exercice 16 :

Soit E un ensemble non-vide, et soit A une partie de E. On définit les applications :
$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array} \quad \text{et} \quad \psi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array}.$$

1. On suppose que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Les applications ϕ_A et ψ_A sont-elles injectives, surjectives ?
2. Mêmes questions en posant $A = E$.
3. Mêmes questions en posant $A = \emptyset$.

Exercice 17 :

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer les énoncés suivants :

1. (f est injective et g est injective) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ est injective.
2. (f est surjective et g est surjective) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ est surjective.
3. $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow$ f est injective.
4. $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow$ g est surjective.
5. ($g \circ f$ est injective et f est surjective) $\Longrightarrow$ g est injective.
6. ($g \circ f$ est surjective et g est injective) $\Longrightarrow$ f est surjective.

Dans chaque cas montrer que la réciproque est fausse.