Travaux dirigés 3. Bases et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs:

   $$u = (1, 2, -5), v = (2, 1, 0), w = (-1, 1, 2), x = (1, 3, 0)$$

   Montrer que (u, v, w, x) forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs:

   $$u = (1, -2, 3, 4), v = (0, 5, -1, 8), w = (-1, 3, 2, -1), x = (2, -1, 0, 3)$$

   La famille (u, v, w, x) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-elle libre ?

Exercice 2

Vérifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (n à préciser), en les écrivant comme sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs (que l'on précisera).

En déduire une base et la dimension de ces sous-espaces vectoriels.

$$F_1 = \{(x, y, x - y)\mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$$

$$F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \text{ et } x + 2z - 2t = 0 \text{ et } x + y + 3z - 3t = 0\}$$

Exercice 3

On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en les écrivant comme sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs.

2. Déterminer $E \cap F$ et donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension de $E \cap F$.

3. Compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base $\mathcal{B}_E$ de E. Compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base $\mathcal{B}_F$ de F. Puis, compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Mêmes questions avec $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

Exercice 4

Déterminer un système d'équations et une base des sous-espaces vectoriels suivants :

$$F_5 = \text{Vect}\left(((1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 2))\right)$$

$$F_6 = \text{Vect}\left(((1, 0, 4, -2))\right)$$

$$F_7 = \text{Vect}\left(((1, 1), (2, 1))\right).$$

Exercice 5

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1, 2, -1, -2)$, $b = (2, 3, 0, -1)$, $c = (1, 3, -1, 0)$, $d = (1, 2, 1, 4)$. Montrer que a, b, c et d sont linéairement indépendants. Calculer les coordonnées de $x = (7, 14, -1, 2)$ dans la base (a, b, c, d).

2. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de α, β, γ dans $\mathbb{R}$, les coordonnées du vecteur (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

Exercice 6

Soit (a, b, c) une famille libre d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont une base.

$$(a, b), \quad (a + b, a - b), \quad (a + 2b, 3a - 6b), \quad (a + c, b + c, c)$$

$$(3a + 2b + c, a + b - c, -a + c), \quad (a - b + c, a + b - c, a - 3b + 3c).$$

Dans le cas où la famille est une base, exprimer a comme une combinaison linéaire des éléments de cette base.

Exercice 7

Fixons un nombre entier $n \geq 2$. Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de dimension $n - 1$.
Montrer que,

$$\dim\left(F_1 \cap F_2\right) \geq n - 2.$$

Exercice 8

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}, \quad G = \text{Vect}\,((1, 2, 1)).$$

Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 9

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les deux sous-ensembles F et G suivants,

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}, \quad G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid \exists\, a \in \mathbb{R},\ f(x) = ax,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et prouver que $E = F \oplus G$.

Exercice 10

Soient $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $v_4 = (7, 2, 0, -1)$ et $v_5 = (2, -1, 2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}((v_1, v_2, v_3, v_4, v_5))$.
2. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et le sous-espace G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 12

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet pour base la famille (f_1, f_2, f_3) définie par

$$f_1(X) = X^2, \quad f_2(X) = X^2 + X, \quad f_3(X) = X^2 - 1.$$

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme f de degré au plus deux dans cette base ?

Exercice 13

Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les polynômes : $P_1(X) = X^3 - 2X^2 + 4X + 1$, $P_2(X) = X^3 + 6X - 5$, $P_3(X) = 2X^3 - 3X^2 + 9X - 1$, $P_4(X) = 2X^3 - 5X^2 + 7X + 5$. Trouver une base et la dimension de W.

Exercice 14

1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 avec

$$v_1 = (2,3,5), v_2 = (0,1,3), v_3 = (2,5,11)$$

   (a) Donner une base et la dimension de E.

   (b) Déterminer la (les) équation(s) cartésienne(s) de E. (On s'assurera au brouillon que v_1, v_2 vérifient ces équations)

2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par w_1, w_2, w_3 avec

$$w_1 = (1,1,2), w_2 = (1,0,1), w_3 = (-2,5,3)$$

   (a) Donner une base et la dimension de F.

   (b) Déterminer la (les) équation(s) cartésienne(s) de F. (On s'assurera au brouillon que w_1, w_2, w_3 vérifient ces équations)

3. Soit $G = E \cap F$.

   (a) Justifier que G est un sous-espace vectoriel.

   (b) Expliciter G.

   (c) En déduire une base et sa dimension.

   (d) Que peut-on dire du sous-espace vectoriel $E + F$?