TD4

Fonctions polynômiales et rationnelles

Fonctions polynômiales

Exercice 1

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2.
   (a) En utilisant la forme factorisée du polynôme P, puis en développant l'expression obtenue, exprimer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de a, b et c.
   (b) Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$.
2. On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
   (a) Trouver une solution évidente.
   (b) Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
   (c) En déduire l'autre solution.
3. Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1.
4. Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192.

Exercice 2

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$,
2. $A(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$,
3. $A(x) = x^5 + 3x^4 + 1$ et $B(x) = x^3 + x + 1$.

Exercice 3

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - 1)Q(x)$.
3. En déduire les racines de P.
4. Résoudre l'équation (E) : $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$.

Exercice 4

Pour tout réel x, on pose : $P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$.

1. Prouver que -1 est une racine de P et déterminer Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x + 1)Q(x)$.
2. Prouver que -1 est aussi une racine de Q et déterminer R tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x+1)R(x)$.
3. Prouver que -2 est racine de R et en déduire une factorisation de P.
4. Résoudre l'inéquation (I) : $(\ln(x))^5 + 5(\ln(x))^4 + 10(\ln(x))^3 + 11(\ln(x))^2 + 7\ln(x) + 2 > 0$.

Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

1. $A(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$,
2. $B(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$,
3. $C(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$,
4. $D(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$,
5. $E(x) = 3x^3 + 19x^2 - 100$,
6. $F(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 4x$.

Fonctions rationnelles

Exercice 6

Factoriser les fonctions rationnelles suivantes :

1. $A(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$,
2. $B(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4} - \dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{2}{x^3-x^2}$,
3. $C(x) = \dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^3-x^2-x+1} + \dfrac{2x^2}{x^2-3x+2} - 3$.

Exercice 7

1. (a) Factoriser l'expression $A(x) = \dfrac{x+1}{2x^2-5x+2} + \dfrac{2}{4x^2-1}$.

   (b) Résoudre l'inéquation $A(x) \geq 0$.

2. (a) Factoriser l'expression $B(x) = \dfrac{4x+1}{2x^3-3x^2-3x+2} - \dfrac{4}{x^2-4}$.

   (b) Résoudre l'inéquation $B(x) < 0$.

Exercice 8

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$.
2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
3. Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\dfrac{3x^3 - 10x^2 + 12x - 3}{(x-2)(x-1)} = ax + b + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{x-1}$.

Exercice 9

Soit un entier $n \geq 2$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 10

Soit un entier $n \geq 2$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \geq 2,\ \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Exercice 11

Soit un entier $n \geq 1$. On se propose de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{a}{k!} + \dfrac{b}{(k+1)!}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.