

Calcul intégral**Rappels de cours**

- Primitives d'une fonction continue. Définition et existence. Primitives usuelles. Calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide d'une primitive. Sommes de Riemann.
- Formule de l'intégration par parties. Applications aux calculs d'intégrales de fonctions dont la dérivée est simple ($\ln(x)$, $\arctan(x)$...) ou à l'étude d'intégrales dépendant d'un entier naturel (intégrales de Wallis...).
- Formule du changement de variables. Applications.
- Calcul d'intégrales de fonctions rationnelles (à l'aide d'une décomposition en éléments simples), de fonctions rationnelles en $\exp(x)$, en $\cos(x)$ et $\sin(x)$...

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^4 dt \quad (b) \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/t}}{t^2} dt \quad (c) \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 \frac{t+1}{t^2-5t+6} dt \quad (b) \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t(t^2+1)} \quad (c) \int_0^1 \frac{t}{t^2+t+1} dt$$

Exercice 3

 Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$$

Exercice 4

 Calculer les limites quand n tend vers l'infini de :

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad (b) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} \quad (c) \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$$

Exercice 5

 Déterminer la limite de la suite $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}$.

Exercice 6

 On pose $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$.

 Calculer $I(x)$ à l'aide des sommes de Riemann pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} \quad (b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{2 - \cos^2(t)} dt \quad (c) \int_0^1 \frac{dt}{e^{h(t)}}$$

Exercice 8

 1. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$.

 2. En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$.

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \quad (b) \int_0^{1/2} \arcsin(t) dt \quad (c) \int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)} dt$$

$$(d) \int_0^1 t(\arctan(t))^2 dt \quad (e) \int_1^e t^n \ln(t) dt \quad (f) \int_0^{1/2} e^{\arcsin(t)} dt$$

Exercice 10

Proposer trois méthodes différentes pour calculer $\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{t} dt$.

Exercice 11

Calculer

$$\int_0^\pi t \sin(t) e^{-t} dt$$

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \cos(nt) \cos^n(t) dt$$

Exercice 13

Calculer

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt$$

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.
 2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
 3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
-

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^n} dx$. On a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
 2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.
(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 3. (a) Justifier que $\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
(c) Donner la limite de la suite (u_n) .
-

Exercice 16

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
 (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.
 (c) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.
-

Exercice 17

Soit x un réel positif, on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{x^n}{n!} e^x$.
 2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
 3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.
 (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
 4. En remarquant que $\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$.
 5. (a) A l'aide des questions précédentes, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
 (b) En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
-

Exercice 18

On considère les intégrales de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx.$$

1. Former pour $n \geq 2$ une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .
 2. En déduire que la suite $n \mapsto nW_n W_{n-1}$ est constante.
 3. Montrer que la suite $n \mapsto W_n$ est décroissante.
 4. En déduire que $W_{n-1} \sim W_n$, puis un équivalent de W_n .
-

Exercice 19

1. (a) Soit un entier $k \geq 2$. Justifier que, pour tout $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k \ln(k)} \geq \frac{1}{x \ln(x)}$.

(b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln(x)}$.

(c) Soit un entier $n \geq 2$. En sommant les inégalités pour k allant de 2 à n , montrer que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$.

(b) Soit un entier $n \geq 1$. En sommant les inégalités précédentes, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 20

L'objectif de cet exercice est de déterminer le comportement asymptotique de la série harmonique,

dont la n -ième somme partielle sera notée $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que :

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$

3. En déduire que la série harmonique diverge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 21

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(x) dx \leq \ln(k+1)$.

2. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$\int_1^n \ln(x) dx \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(x) dx$$

3. En déduire un encadrement de $\ln(n!)$ puis de u_n .

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 22

On considère pour tout $x > 0$ la fonction définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie.
 2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x > 1, |f(x)| \leq \frac{2}{x}$.
 3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 4. Montrer que : $\forall t > 0, 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 5. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.
-

Exercice 23

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
 2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
 3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H .
-

Exercice 24

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$.

1. Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)dt$.
 2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
 3. Résoudre cette équation différentielle.
-