Université de Reims Champagne Ardenne | **Année universitaire 2011-2012**
U.E.F. Ma0101 | **Mentions MI-PC-SPI**
Mathématiques de base | **Licence 1**

Exercices du Chapitre 4: Equations differentielles.

Equations différentielles du premier ordre

Exercise 1 *Soit $y = y(t)$. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles*

$$i)\quad y' = t\,y \qquad ii)\quad y' = t\,e^{-y} \qquad iii)\quad y' = y\,\tan t$$

$$iv)\quad 3y' = -y \qquad v)\quad y' + y\sin t = 0 \qquad vi)\quad y' - \frac{y}{\tan t} = 0$$

$$vii)\quad y' = t\,\left(1 + y^2\right) \qquad viii)\quad y' = -t\,(1-y)^2$$

Exercise 2 *Soit $y = y(t)$. En précisant sur quel intervalle, résoudre les problèmes de Cauchy suivantes*

$$\begin{cases} \left(t^2 - 1\right)\,y' + t\,y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

pour les couples: a) $(t_0, y_0) = (2, 1)$; b) $(t_0, y_0) = (-2, -3)$; c) $(t_0, y_0) = (0, 2)$.

Exercise 3 *Soit $y = y(t)$. En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles*

a) $y'\left(1 + t^3\right) + t^2 y = t^2$ *(*Indication: On cherchera une solution particulière évidente*)*

b) $y' = 2y + t^3$ *(*Indication: Chercher une solution particulière de la forme $y_P = at^3 + bt^2 + ct + d$*)*

Exercise 4 *Soit $y = y(t)$. Utiliser la méthode de "la variation de la constante" pour résoudre les equations suivantes*

$$a)\quad t\,y' + y - \sin t = 0 \qquad b)\quad y' - t\,y = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t+1} \qquad c)\quad y' + y\,\tan t = \frac{2t\,\cos t}{1+t^2}\,,$$

en précisant l'intervalle.

Exercise 5 *Soit $y = y(t)$. En précisant sur quel intervalle, résoudre les problèmes de Cauchy suivantes*

$$i)\quad y'\,\cos t - y\,\sin t = 1\,, \qquad y(0) = 2$$

$$ii)\quad y' - y = e^t - 1\,, \qquad y(1) = 2$$

$$iii)\quad y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{1+t^2}\,, \qquad y(1) = 1$$

$$iv)\quad y' - y\,\tanh t = t\,\cosh^2 t\,, \qquad y(0) = 2$$

Exercise 6 *a) Trouver une primitive de la fonction $f(t) = te^{-t}$.*
b) Trouver une primitive de la fonction $g(t) = \cos t\,\sin t\,e^{-\cos t}$.
c) Trouver toutes les solutions de l'équation

$$y' + y\,\sin t = \cos t\,\sin t\,.$$

Exercise 7 *a) Résoudre sur $(-1, 1)$ l'équation*

$$\sqrt{1-t^2}\,y' - y = 0\,.$$

b) Déterminer sur $(-1, 1)$

$$\int \frac{e^{\arcsin s}}{\sqrt{1-s^2}}ds\,.$$

c) Résoudre sur $(-1, 1)$ l'équation differentielle

$$\sqrt{1-t^2}\,y' - y = e^{2\arcsin t}\,.$$

Exercise 8 *(*Recollement*)*
1. *a) Résoudre l'équation differentielle*

$$(1+t^3)\,y' + t^2\,y = t^2$$

sur $(-\infty,-1)$ *et sur* $(-1,+\infty)$. *b) Existent-elles des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?.*

2. *a) Résoudre l'équation differentielle*

$$(t+1)\,y' - 2y = (t+1)^4$$

sur $(-\infty,-1)$ *et sur* $(-1,+\infty)$. *b) Existent-elles des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?.*

Equations différentielles du second ordre

Exercise 9 *Soit* $y = y(t)$. *Trouver les solutions des équations differentielles suivantes*

$$a)\quad y'' - 5y' + 4y = 0 \qquad b)\quad y'' + y' + y = 0 \qquad c)\quad y'' - y' = 0\,.$$

Exercise 10 *Soient* $x = x(t)$, $y = y(t)$. *Résoudre les systemes differentielles suivantes*

$$a)\quad \begin{cases} x' = x + 7y \\ y' = 2x + y \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x \end{cases}\,.$$

Exercise 11 *Résoudre les problèmes de Cauchy*

$i)\quad y'' - 8y' + 12y = 0\,, \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1;\qquad ii)\quad y'' + 2y' + y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0;$

$iii)\quad y'' - 4y' = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1;\qquad iv)\quad y'' - 2y' + 5y = 0\,, \qquad y(0) = 2\,,\ y'(0) = 4;$

$v)\quad y'' + 4y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1.$

Exercise 12 *Soit* $y = y(t)$. *Trouver les solutions des équations differentielles*

$i)\quad y'' + 2y' + 10y = 10t + 1 \qquad ii)\quad y'' - 5y' + 6y = 6t^2 - 4t - 3 \qquad iii)\quad y'' - 4y' = 8t$

$iv)\quad y'' + y = e^{2t} \qquad v)\quad y'' + 9y = 5te^{-t} \qquad vi)\quad y'' + 5y' = e^{-5t} \qquad vii)\quad y'' - 2y' + y = te^t$

Exercise 13 *a) Déterminer l'ensamble des solutions de l'equation*

$$y'' + 4y' + 5y = 1$$

b) Pour chaque solution $y(t)$, *évaluer:* $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)\,.$

Exercise 14 *Resoudre les problèmes de Caucy suivantes*

$i)\quad y'' - 8y' + 12y = 4t\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1 \qquad ii)\quad y'' - 6y' + 9y = 3e^{3t}\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 4$

$iii)\quad y'' - 4y' + 5y = 10\,, \qquad y(0) = -2\,,\ y'(0) = 2$

Exercise 15 *(*Superposition des solutions*) Trouver les solutions des équations differentielles suivantes*

$$a)\quad y'' - 4y' + 4y = t + e^{2t}\,; \qquad b)\quad y'' - 10y' + 25y = \cosh 5t\,.$$

Exercise 16 *Soit* $y = y(t)$. *Trouver les solutions des équations differentielles*

$i)\quad y'' + y = \cos 2t\,; \qquad ii)\quad y'' + 3y' + y = \sin t\,; \qquad iii)\quad y'' - 2y' + y = t\cot s\,;$

$iv)\quad y'' + y = t\sin t\,; \qquad v)\quad y'' - 2y = t\,e^{2t}\sin t\,; \qquad v)\quad y'' - 2y' + 10y = \sin 3t + e^t\,;$

$vi)\quad y'' + y = e^{2t} + t\sin t\,; \qquad vii)\quad y'' + y = 2t\cot t\cos 2t\,.$

Exercise 17 *(*Recollement*) Soit* $y = y(t)$. *On considère l'équation*

$$t^2y'' - 5t\,y' + 9y = 0 \qquad (\mathrm{E}).$$

a) Déterminer les solutions polynomiales de E.
b) A l'aide du changement de variable $y = t^3\,u$, *déterminer les solutions de* E *sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
c) Résoudre E *sur* $\mathbb{R}$.