MA0401 URCA
L2 2008-2009

FEUILLE 4.- SÉRIES DE FOURIER.

Exercice 1

Soit f la fonction impaire et périodique de période 2π définie par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$, $f(0) = \alpha$, $f(\pi) = \beta$.

1. Régularité et graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Quelle est la somme de la série de Fourier de f ? Quelle est la nature de la convergence de cette série de Fourier ?
4. Calculer les sommes
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 2

Soit h la fonction *impaire*, périodique de période 2π, définie sur $]0, \pi[$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \ h(x) = \cos(x)$$

et prenant la valeur 0 en 0 et en π.

1. Régularité et graphe de h (sur $[-3\pi, 3\pi]$). On précisera bien sur quels domaines h est C^1, continue, les éventuels points de discontinuité.
2. Calculer les coefficients de Fourier de h et écrire sa série de Fourier.
3. Sur quel domaine et vers quelle fonction la série de Fourier de h converge-t-elle ?
4. Prouver que
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+1)}{4(2p+1)^2 - 1}.$$

Exercice 3

Mêmes (premières) questions pour les fonctions périodiques de période 2π définies par

$$f(x) = e^x \text{ sur }]0, 2\pi[, \qquad g(x) = e^x \text{ sur }]-\pi, \pi[.$$

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Comment obtient-on $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$? Faire tendre a vers 0 en justifiant toutes les opérations.

Exercice 4

Soit h la fonction périodique de période 2π, définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ h(x) = x$$

et prenant la valeur 0 en π.

1. Régularité et graphe de h (sur $[-3\pi, 3\pi]$). La fonction h est-elle paire, impaire ou n'a-t-elle aucune de ces propriétés ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de h et écrire sa série de Fourier.
3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, en citant précisément le théorème utilisé.

Exercice 5

Soit h la fonction continue et périodique de période 2π, définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ h(x) = |x|.$$

1. Traçer le graphe de h (sur $[-3\pi, 3\pi]$). La fonction h est-elle paire, impaire ou n'a-t-elle aucune de ces propriétés ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de h et écrire sa série de Fourier.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ en citant précisément le théorème utilisé.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < \pi$. Soit f la fonction paire, $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } \ a < x \leq \pi \end{cases}$$

a. Que peut-on dire de la régularité de f ?

b. Calculer les coefficients de Fourier de f.

c. Montrer que la série de Fourier de f converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et déterminer sa somme, en énonçant précisément le théorème.

d. Montrer que, avec nos hypothèses, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$ converge, et calculer sa somme.

e. Même question avec la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin na)^2}{n^2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

a) Determiner les coefficients de Fourier de f.

b) La série de Fourier de f converge-t-elle en chaque point ? Si oui, quelle est la somme de cette série de Fourier ?

c) Déduire de b) la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 8

Montrer que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \;=\; x(\pi - x).$$

Exercice 9

Inégalité de Wirtinger

Soit f une application continue, C^1 par morceaux sur $[0, \pi]$, telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Le but de cet exercice est de prouver que

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

1. Soit g la fonction 2π-périodique, impaire, égale à f sur l'intervalle $[0, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de g' (qui est définie sauf éventuellement en un nombre fini de points).
2. Écrire l'égalité de Parseval pour g, pour g' et en déduire le résultat annoncé.