Université de Reims Champagne-Ardenne **2016/2017**
Licence MI 1ère année **Ma0102**

TD4 : Relations d'équivalence

Exercice 1 :

1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On se donne la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E en spécifiant les éléments de E en relation modulo $\mathcal{R}$:

$$1\mathcal{R}1 \quad , \quad 2\mathcal{R}2 \quad , \quad 3\mathcal{R}3 \quad , \quad 4\mathcal{R}4 \quad , \quad 1\mathcal{R}2 \quad , \quad 2\mathcal{R}1 \quad , \quad 2\mathcal{R}3 \quad , \quad 3\mathcal{R}2 \quad , \quad 1\mathcal{R}3 \quad , \quad 3\mathcal{R}1 \quad .$$

   (a) Faire la représentation sagittale de cette relation binaire.

   (b) Cette relation binaire est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? Si oui (3fois) donner les classes d'équivalence.

2. Mêmes questions avec la relation binaire $\mathcal{R}'$ donnée par :

$$1\mathcal{R}'1 \quad , \quad 1\mathcal{R}'2 \quad , \quad 2\mathcal{R}'1 \quad , \quad 2\mathcal{R}'4 \quad , \quad 4\mathcal{R}'3 \quad , \quad 4\mathcal{R}'1 \quad , \quad 4\mathcal{R}'2 \quad , \quad 1\mathcal{R}'4 \quad .$$

Exercice 2 :
Dans chacun des exemples suivants d'un ensemble E et d'une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E, donner les propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité) de $\mathcal{R}$.

1. E est l'ensemble des cercles du plan, et $\mathcal{R}$ est définie par : $\forall (C_1, C_2) \in E^2\,, \quad C_1\mathcal{R}C_2 \;\Leftrightarrow\; C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.
2. $E = \mathbb{Z}^\star$ et $\mathcal{R}$ est définie par : $\forall (m, n) \in E^2\,,\ m\mathcal{R}n \;\Leftrightarrow\; (m \text{ divise } n)$.
3. $E = \mathcal{P}(X)$ où X est un ensemble non-vide, et $\mathcal{R}$ est définie par : $\forall (A, B) \in E^2\,, \quad A\mathcal{R}B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$.

Exercice 3 :
On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$z\mathcal{R}z' \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |z'| \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Décrire géométriquement la classe de z modulo $\mathcal{R}$.
3. Pour chaque classe d'équivalence, trouver un représentant qui appartient à $\mathbb{R}_+$, et en déduire une bijection entre $\mathbb{C}/\mathcal{R}$ et $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 :
Soit f une application de E dans F. On définit la relation $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, x') \in E^2$:

$$x\mathcal{R}x' \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(x') \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que l'application suivante est injective : $\overline{f} \ : \ E/\mathcal{R} \to F\ , \ \ \overline{x} \mapsto f(x)$.

Exercice 5 :
On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de 0, 1, $\dfrac{1}{2}$, puis de manière générale la classe $\overline{x}$ d'un élément $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 6 :
Soit E un ensemble et soient $X_1, \ldots, X_n$ des parties non-vides de E telles que :

- $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = E$;
- $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tels que $i \neq j$.

1. Montrer que $\{X_1,\ldots,X_n\}$ est une partition de E au sens de la définition 5 du cours.
2. Décrire toutes les partitions possibles de l'ensemble $E = \{a,b,c\}$.

Exercice 7 :
Soit E un ensemble et $\{X_1,\ldots,X_n\}$ une partition de E comme dans l'exercice 6. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x,y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \text{tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i)\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 8 :
Soit n un entier strictement positif. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ en posant, pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$:

$$a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad (n \text{ divise } a-b)\ .$$

On note très souvent cette relation binaire par $a \equiv b[n]$ (à la place de $a\mathcal{R}b$).

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un entier $a \in \mathbb{Z}$.
3. Combien a-t-on de classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?
4. Déduire la partition de $\mathbb{Z}$ correspondant à $\mathcal{R}$.

Exercice 9 :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans le plan en posant, pour tout couple de points (M,N) du plan,

$$M\mathcal{R}N \quad \Leftrightarrow \quad \left[\ M = N \text{ ou } \big(M \neq N \text{ et } (MN)//\mathcal{D}\big)\ \right]\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit M un point du plan. Décrire la classe d'équivalence de M modulo $\mathcal{R}$.
3. Décrire l'ensemble quotient, et la partition du plan correspondant à $\mathcal{R}$.

Exercice 10 :
On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}$ en posant, pour tout $\big((a,b),(c,d)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Décrire géométriquement la classe d'équivalence de (a,b), et en déduire une description en termes géométriques de l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 11 :
On définit dans $\mathbb{C}^\star$ la relation binaire $\mathcal{R}$ en posant, pour tout $(z,z') \in (\mathbb{C}^\star)^2$,

$$z\mathcal{R}z' \quad \Leftrightarrow \quad (\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star\,,\quad z = \lambda z'\ )\ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Dans cet exercice, on notera $Cl(z)$ la classe de z modulo $\mathcal{R}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Décrire géométriquement $Cl(z)$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Montrez qu'il existe un unique représentant dans $Cl(z)$ de la forme $e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0,\pi[$, et en déduire une bijection entre $\mathbb{C}^\star/\mathcal{R}$ et $[0,\pi[$.